МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум (10.1.2015) - Група 1

1. Испитати монотоност и ограниченост низа (a_n) чији је општи члан дат са

$$a_n = \frac{n^2+2}{e^n}.$$

Решење: Како је $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+2}{e^{n+1}}$, то је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+2}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^2+2} = \frac{1}{e} \cdot \frac{n^2+2n+3}{n^2+2}.$$

Из неједнакости $(n-1)^2 \geq 0$ следи да је $2n \leq n^2+1$, односно $n^2+2n+3 \leq 2n^2+4$. Према томе, за $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{n^2+2n+3}{n^2+2} \leq 2,$$

па је $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{2}{e} < 1$, што значи да је (a_n) монотоно опадајући низ.

Дати низ је и ограничен јер је $0 < a_n \leq a_1 = \dfrac{3}{e}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Друго решење за монотоност. Нека је $f(x) = \dfrac{x^2+2}{e^x}$. Како је

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+2)e^x}{e^{2x}} = -\frac{x^2-2x+2}{e^x} < 0$$

за свако $x \in \mathbb{R}$, функција f је монотоно опадајућа на $\mathbb{R}$. Специјално, за $x = n$ и $y = n+1$ је $x < y$, па је $a_{n+1} = f(y) < f(x) = a_n$.

2. Нека је $f(x) = x^2 \ln(x+2)$, $g(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ и $h(x) = \ln(1+x^2)$.

(1) Одредити Тејлоров полином трећег степена функције f у околини тачке $x_0 = 1$ и Маклоренове полиноме четвртог степена функција g и h.

(2) Одредити

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - h(x) - 1 + \frac{7}{6}x^2}{5x^4}.$$

Решење: (1) Тејлоров полиномм T_3 за функцију f у околини тачке $x = 1$ дат је са

$$T_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3.$$

Диференцирањем функције f налазимо да је

$$f'(x) = 2x\ln(x+2) + \frac{x^2}{x+2}$$
$$f''(x) = 2\ln(x+2) + \frac{4x}{x+2} - \frac{x^2}{(x+2)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{8}{(x+2)^3}.$$

У тачки $x = 1$ имамо да је

$$f(1) = \ln 3, \quad f'(1) = 2\ln 3 + \frac{1}{3}, \quad f''(1) = 2\ln 3 + \frac{11}{9}, \quad f'''(1) = \frac{38}{27}.$$

Према томе,

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \ln 3 + \left(2\ln 3 + \frac{1}{3}\right)(x-1) + \left(\ln 3 + \frac{11}{18}\right)(x-1)^2 + \frac{19}{81}(x-1)^3 \\ &= \frac{7}{162} - \frac{5}{27}x + \left(\ln 3 - \frac{5}{54}\right)x^2 + \frac{19}{81}x^3. \end{aligned}$$

За $x \to 0$ важи $h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ и

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^{1/3} \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \binom{1/3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{72}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Према томе, Маклоренови полиноми G_4 и H_4 функција g и h дати су са

$$G_4(x) = 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{72}x^4, \quad H_4(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4.$$

(2) За $x \to 0$ је

$$\frac{g(x) - h(x) - 1 + \frac{7}{6}x^2}{5x^4} = \frac{G_4(x) - H_4(x) - 1 + \frac{7}{6}x^2 + o(x^4)}{5x^4} = \frac{\frac{35}{72}x^4 + o(x^4)}{5x^4} = \frac{7}{72} + o(1),$$

па је тражена гранична вредност једнака $7/72$.

3. Испитати ток и скицирати график функције $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$.

Решење: (1) Из услова $\dfrac{x^3}{x+2} \geq 0$ добијамо да је $D_f = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$. Функција је позитивна за $x \in D_f \setminus \{0\}$ и има само једну нулу, $f(0) = 0$.

Како је $\lim\limits_{x \to -2_-} f(x) = +\infty$, права $x = -2$ је вертикална асимптота графика функције f.

Из једнакости

$$f(x) = |x|\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} = |x|\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = |x| - \frac{|x|}{x} + o(1)$$

када $|x| \to +\infty$, следи да је права $y = x - 1$ коса асимптота за $x \to +\infty$, а права $y = -x + 1$ је коса асимптота за $x \to -\infty$.

(2) Пошто је

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{f(x)(x+2)^2},$$

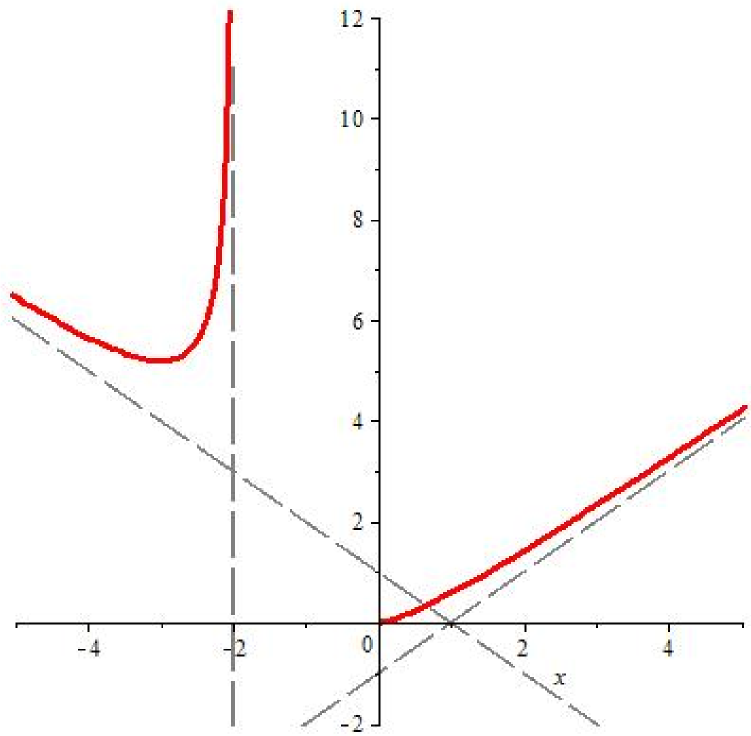
знак првог извода зависи само од знака израза $x+3$. Према томе, функција f је опадајућа на интервалу $(-\infty, -3)$, а растућа на интервалима $(-3, -2)$ и $(0, +\infty)$. У тачкама $x = -3$ и

$x = 0$ функција има минимуме - први је локални ($f_{\min} = f(-3) = 3\sqrt{3}$), а други је апсолутни ($f(0) = 0 \leq f(x)$ за свако $x \in D_f$).

(3) Диференцирањем првог извода добијамо

$$f''(x) = \frac{3f(x)}{x^2(x+2)^2} > 0$$

за савко $x \in D_f \setminus \{0\}$. Према томе, на интервалима $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$ функција је конвексна.



На слици је дата скица графика функције f.

Драган Ђорић