МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум, јануар 2017 - Група Д

Решења задатака - Драган Ђорић

1. *a*) Дат је низ чији је општи члан

$$a_n = \frac{1}{5\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 19} + \cdots + \frac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}.$$

Доказати да је низ (a_n) ограничен и одредити његову граничну вредност.

b) Одредити тачке нагомилавања низа чији је општи члан дат са

$$a_n + \frac{5\cdot 2^{n+1} - 3\cdot 7^{n+1}}{9\cdot 2^n + 7^n}\cdot \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Решење: *a*) Пошто је

$$a_n = \frac{1}{7}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{7n-2} - \frac{1}{7n+5}\right] = \frac{1}{7}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7n+5}\right],$$

то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{35}$. Према томе, низ (a_n) је конвергентан. Наравно, то значи да је низ и ограничен (Теорема 8.2 у уџбенику[1] из Математике 1).

b) Нека је $u_n = a_n + b_n \cdot c_n$, где је

$$b_n = \frac{5\cdot 2^{n+1} - 3\cdot 7^{n+1}}{9\cdot 2^n + 7^n}, \quad c_n = \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Ако је $t = 2/7$, тада $t^n \to 0$ када $n\to\infty$, па је

$$b_n = \frac{5\cdot 2\cdot t^n - 3\cdot 7}{9\cdot t^n + 1} = \frac{10t^n - 21}{9t^n + 1} \to -21, \quad n\to\infty.$$

Низ (c_n) је периодичан низ, при чему за $k = 0, 1, 2, \dots$ и $m = 1, \dots, 7, 8$ важи

$$c_{8k+m} = \cos\left(2\pi + \frac{m\pi}{4}\right) = \cos\frac{m\pi}{4} = c_m.$$

Према томе, чланови $c_1 = c_7 = \sqrt{2}/2$, $c_2 = c_6 = 0$, $c_3 = c_5 = -\sqrt{2}/2$, $c_4 = -1$, $c_8 = 1$ су тачке нагомилавања низа (c_n).

Ако су a и b граничне вредности низова (a_n) и (b_n), тачке нагомилавања низа (u_n) су $a + bc_1$, a, $a + bc_3$, $a - b$ и $a + b$.

2. *a*) Одредити Маклоренове полиноме четвртог степена за функције $x \mapsto \ln(\cos 2x)$ и $x \mapsto e^{2x^2}$.

b) Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos 2x) + e^{2x^2} - 1}{3x^4}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b + (sinx + e^{2x})^{\frac{1}{6x}}, & x > 0 \end{cases}$$

[1] Д. Ђорић, Р. Лазовић, МАТЕМАТИКА 1, ФОН, Београд, 2014

Одредити вредности реалних параметара a и b, ако постоје, тако да функција f буде непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење: $a)$ Из једнакости

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0$$

следи да је

$$\begin{aligned}\ln(\cos 2x) &= \ln\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)\\ &= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o\left[\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2\right]\\ &= -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}(4x^4) + o(x^4)\\ &= -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

када $x \to 0$. То значи да је $-2x^2 - \frac{4}{3}x^4$ тражени Маклоренов полином за дату функцију $x \mapsto \ln(\cos 2x)$.

Из једнакости

$$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o\left[(2x^2)^2\right] = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4), \quad x \to 0$$

имамо да је $1 + 2x^2 + 2x^4$ тражени Маклоренов полином за функцију $x \mapsto e^{2x^2}$.

$b)$ Функција f је непрекидна у тачки $x = 0$ ако је $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = f(0)$.

За $x \to 0_-$ имамо да је

$$f(x) = \frac{-2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + 1 + 2x^2 + 2x^4 - 1 + o(x^4)}{3x^4} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{3x^4} = \frac{2}{9} + o(1),$$

што значи да је $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = 2/9$.

За $x \to 0_+$ имамо да је

$$\left(\sin x + e^{2x}\right)^{\frac{1}{6x}} = e^{\frac{1}{6x}\ln(x+1+2x+o(x))} = e^{\frac{1}{6x}(3x+o(x))} = e^{\frac{1}{2}+o(1)},$$

што значи да је $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = b + \sqrt{e}$.

Из услова за непрекидност следи да је $2/9 = a = b + \sqrt{e}$, односно $a = 2/9$ и $b = 2/9 - \sqrt{e}$.

3. Испитати ток и скицирати график функције $f : x \mapsto x - 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Решење: (1) Из услова $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ добијамо да је $D_f = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$. Функција је позитивна за $x \geq 3$, негативна за $x < 2$ и има само једну нулу, $f(2) = 0$.

Из једнакости

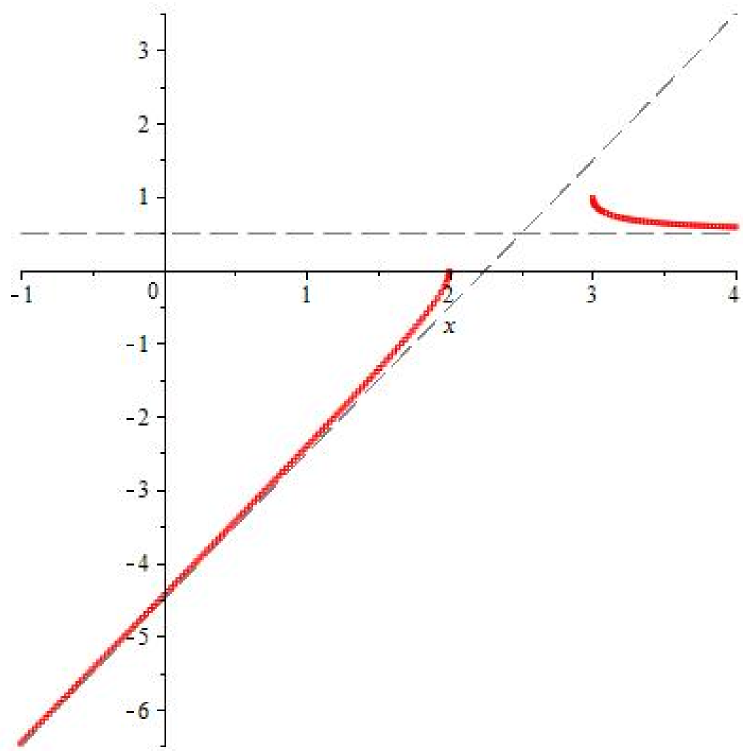
$$f(x) = x - 2 - |x|\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)^{1/2} = x - 2 - |x|\left(1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

када $|x| \to +\infty$, следи да је права $y = 1/2$ хоризонтална асимптота за $x \to +\infty$, а права $y = 2x - 9/2$ је коса асимптота за $x \to -\infty$.

(2) Пошто је
$$f'(x) = 1 - \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x-6}},$$
за $x < 2$ је $f'(x) > 0$ (јер је $2x - 5 < 0$), па је функција f растућа на интервалу $(-\infty, 2]$. То такође значи и да функција има локални максимум у тачки $x = 2$.

За $x > 3$ је $2x - 5 > 2\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ (обе стране неједнакости су позитивне, па се квадрирањем добија еквивалентна неједнакост $25 > 24$), што значи да је функција f опадајућа за $x \geq 3$ и да у тачки $x = 3$ има апсолутни максимум (јер је $f(3) = 1 > f(2) = 0$).

(3) Диференцирањем првог извода добијамо
$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}} \right)' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2-5x+6)^{3/2}} > 0$$
за савко $x \in D_f$. Према томе, на интервалима $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$ функција f је конвексна.



На слици је дата скица графика функције f.