МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум, јануар 2018 - група B

Драган Ђорић

1. a) Одредити вредност параметра a тако да гранична вредност низа чији је општи члан дат са 3 поена

$$a_n = \left(\frac{(n+1)(4n+1)+2}{4n^2+n}\right)^{an+7}, \quad n \in \mathbb{N}$$

буде једнака $1/e$.

b) Одредити тачке нагомилавања низа чији је општи члан дат са 3 поена

$$b_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{(n+1)(4n+1)+2}{4n^2+n}\right)^{2n+7} + \sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решење. a) За $a = 0$ је $a_n = \left(\dfrac{4n^2+5n+3}{4n^2+n}\right)^7 \to 1$ када $n \to \infty$.

За $a \neq 0$ је

$$\ln a_n = (an+7)\ln\left(1+\frac{4n+3}{4n^2+n}\right) \sim (an+7)\cdot\frac{4n+3}{4n^2+n} = \frac{4an^2+(28+3a)n+21}{4n^2+n} \to a, \quad n \to \infty.$$

Како је функција $x \mapsto e^x$ непрекидна на $\mathbb{R}$, то $a_n \to e^a$ када $n \to \infty$.

Према томе, тражена вредност је $a = -1$.

Гранична вредност низа (a_n) може да се добије и тако што се a_n напише у облику

$$a_n = \left[(1+c_n)^{1/c_n}\right]^{(an+7)c_n}, \quad c_n = \frac{4n+3}{n^2+n}.$$

Како $c_n \to 0$ када $n \to \infty$ то $(1+c_n)^{1/c_n} \to e$ и $(an+7)c_n \to a$ када $n \to \infty$.

b) Ако је $v_n = a_n$ за $a = 2$ и ако је $u_n = (-1)^n$ и $w_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, тада је $b_n = u_n v_n + w_n$.

Из a) имамо да $v_n \to e^2$ када $n \to \infty$. За $n = 2k$ и $k \in \mathbb{N}$ је $u_n = 1$ и $w_n = 0$, а за $n = 2k-1$ је $u_n = -1$ и $w_n \in \{-1, 1\}$.

Према томе, тачке нагомилавања низа (b_n) су e^2, $-e^2+1$ и $-e^2-1$.

2. *a*) Одредити Маклоренов полином другог степена функције $f : x \mapsto (1+9x)^{\sin x}$. 5 поена

b) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+9x)^{\sin x}-1}{1-\cos 3x}$. 2 поена

Решење. За $x \to 0$ је

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln(1+9x) = (x + o(x^2))\left(9x - \frac{81}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 9x^2 + o(x^2),$$

па је $f(x) = e^{9x^2+o(x^2)} = 1 + 9x^2 + o(x^2)$.

Према томе[1] , тражени полином је $M_2(x) = 1 + 9x^2$.

Наравно, тражени полином може да се одреди налажењем првог и другог извода функције f у тачки $x = 0$,

$$M_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

b) Ако је f функција из тачке *a*), тада је

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{1-\cos(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2+o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{9+o(1)}{9/2+o(1)} = 2.$$

Ко више воли Лопиталово правило, може да га примени (али два пута и на личну одговорност!) за израчунавање дате граничне вредности јер се ради о неодређености типа $0/0$. При томе је

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{1-\cos(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{9\cos 3x},$$

где је

$$f''(x) = f(x)\left[\frac{9\sin x}{1+9x} + \cos x\ln(1+9x)\right]^2 + f(x)\left[-\frac{81\sin x}{(1+9x)^2} + \frac{18\cos x}{1+9x} - \sin x\ln(1+9x)\right].$$

[1] Ако је M_n Маклоренов полином степена n за функцију f, тада је $f(x) = M_n(x) + o(x^n)$ када $x \to 0$. Међутим, важи и обратно. Ако је $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ када $x \to 0$, тада је P_n управо Маклоренов полином степена n за функцију f. Ова чињеница може да се користи у задацима иако у уџбенику није експлицитно наведена и доказана. Она се иначе лако доказује јер из једнакости $P_n(x) - M_n(x) = o(x^n)$ када $x \to 0$ (коју добијамо из претходне две једнакости) следи да је $P_n = M_n$ (ако за полином Q_n важи $Q_n(x) = o(x^n)$ када $x \to 0$, тада је Q_n нула полином).

3. Испитати ток и скицирати график функције

12 поена

$$f : x \mapsto \frac{2x-1}{\sqrt{x(x+2)}}.$$

Решење. A) Област дефинисаности D_f је скуп $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Пошто[2] $f(x)\to 2$ када $x\to+\infty$ и $f(x)\to -2$ када $x\to-\infty$, праве $y=2$ и $y=-2$ су хоризонталне асимптоте. Вертикалне асимптоте су праве $x=-2$ и $x=0$ јер $f(x)\to-\infty$ када $x\to -2_-$ или $x\to 0_+$. Функција има нулу у тачки $x=1/2$, а позитивна је за $x>1/2$. 3 поена

B) Како је[3] $f'(x)=\dfrac{3x+1}{[x(x+2)]^{3/2}}$, функција опада за $x<-2$ и расте за $x>0$. Функција нема локалних екстремума. 3 поена

C) Како је $f''(x)=-\dfrac{3(2x^2+2x+1)}{[x(x+2)]^{5/2}}$, то је $f''(x)<0$ за свако $x\in D_f$. Према томе, функција је конкавна и на интервалу $(-\infty,-2)$ и на интервалу $(0,+\infty)$. Функција нема тачака превоја. 5 поена

D) На основу података из A), B) и C) лако се скицира график функције f. За $x<-2$ график 'конкавно' и 'опадајуће' иде од хоризонталне асимптоте $y=-2$ до вертикалне асимптоте $x=-2$, а за $x>0$ график 'конкавно' и 'растуће' иде од вертикалне асимптоте $x=0$ до хоризонталне асимптоте $y=2$. 1 поен

Други извод функције f може такође да се израчуна применом правила за извод количника, али може и овако:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(3x+1)(x^2+2x)^{-3/2}\right]' \\ &= 3(x^2+2x)^{-3/2} + (3x+1)(-3/2)(x^2+2x)^{-5/2}(2x+2) \\ &= 3(x^2+2x)^{-5/2}\left[x^2+2x-(3x+1)(x+1)\right] \\ &= 3(x^2+2x)^{-5/2}(-2x^2-2x-1) \\ &= -\frac{3(2x^2+2x+1)}{(x^2+2x)^{5/2}}. \end{aligned}$$

[2] То се лако види из једнакости $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|\sqrt{1+2/x}}$.

[3] Применом правила за извод количника две функције налазимо да је

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+2x}-(2x-1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}}{x(x+2)}=\frac{2(x^2+2x)-(2x-1)(x+1)}{[x(x+2)]^{3/2}}=\frac{3x+1}{[x(x+2)]^{3/2}}.$$