МАТЕМАТИКА 1

Други колоквијум, јануар 2019 - 3. група

Драган Ђорић

1. Дат је низ (a_n) чији је општи члан

$$a_n = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}{\ln 2 \cdot \ln 3} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)}{\ln 3 \cdot \ln 4} + \cdots + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n \cdot \ln(n+1)}, \qquad n \geq 2.$$

a) Испитати конвергенцију низа (a_n) и у случају да конвергира израчунати његову граничну вредност.

b) Одредити све тачке нагомилавања низа (b_n) чији је општи члан

$$b_n = a_n \cdot (1 + (-1)^n) + \frac{5n^2-1}{2n^2+n+1} \cos\frac{2n\pi}{3}.$$

Решење. *a*) Из једнакости

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}{\ln k \cdot \ln(k+1)} = \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln k \cdot \ln(k+1)} = \frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}$$

за $k = 2, 3, \ldots, n$ следи да је

$$a_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \cdots + \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Како $\ln(n+1) \to \infty$ када $n \to \infty$, то је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/\ln 2$, што значи да низ (a_n) конвергира.

b) Ако је $c_n = \dfrac{5n^2-1}{2n^2+n+1}$, $\alpha_n = 1 + (-1)^n$ и $\gamma_n = \cos\dfrac{2\pi n}{3}$, тада је $b_n = a_n\alpha_n + c_n\gamma_n$. Низ (α_n) има две тачке нагомилавања (0 и 2), низ (γ_n) има такође две тачке нагомилавања ($-1/2$ и 1), а низови (a_n) и (c_n) су конвергентни ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/\ln 2 = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 5/2$).

Према томе, тачке нагомилавања низа (b_n) су $-5/4$, $5/2$, $2a - 5/4$ и $2a + 5/2$.

2. Одредити вредност реалног параметра p за коју је функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3\sqrt[3]{1+x} + 3\sin(\sin x) - \dfrac{x^4}{3} - 3x}{x^5}, & x \neq 0 \\ p, & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење. Да би функција f била непрекидна у тачки $x = 0$ потребно је и довољно да важи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Нека је $f(x) = g(x)/x^5$ за $x \neq 0$. Како је за $x \to 0$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \binom{1/3}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

и

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

то је

$$g(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right) + 3x - x^3 + \frac{3}{10}x^5 - \frac{x^4}{3} - 3x + o(x^5) = \frac{17}{90}x^5 + o(x^5)$$

када $x \to 0$.

Према томе,

$$p = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5} \cdot \left(\frac{17}{90}x^5 + o(x^5)\right) = \frac{17}{90}.$$

3. Испитати ток и скицирати график функције

$$f : x \mapsto (x^2 - x)e^{\frac{1}{1-x}}.$$

Решење. A) Област дефинисаности D_f дате функције f је скуп $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, а нула функције је тачка $x = 0$.

За $x \to \pm\infty$ је $f(x) \sim x^2$, што значи да функција нема косих асимптота и да у тим случајевима тежи ка $+\infty$. Поред тога је $\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = -\infty$, што значи да је права $x = 1$ вертикална асимптота (за график са леве стране).

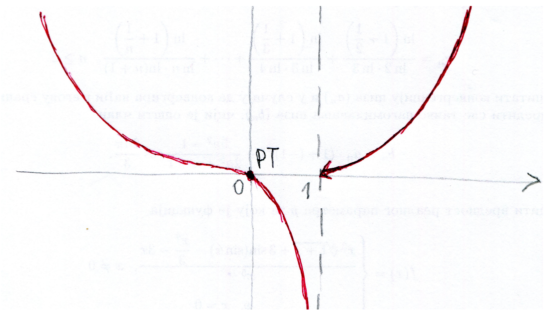
B) Како је[1] $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1} g(x)$, где је $g(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$, то је функција f опадајућа за $x < 1$, а растућа за $x > 1$. Функција нема локалних екстремума.

C) Диференцирањем f' добијамо да је

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 3x}{(x-1)^3} g(x) = \frac{x}{(x-1)^3}(2x^2 - 4x + 3)g(x).$$

Пошто знак за f'' зависи само од x и $x-1$, функција f је конвексна за $x < 0$ и за $x > 1$, а конкавна за $0 < x < 1$. Тачка $x = 0$ је тачка превоја.

D) На основу података из A), B) и C) лако се скицира график функције f.



За $x < 0$ график 'конвексно' и 'опадајуће' иде од $+\infty$ до нуле, а за $0 < x < 1$ график 'конкавно' и 'опадајуће' иде од нуле до $-\infty$ (уз вертикалну асимптоту $x = 1$).

За $x > 1$ график 'конвексно' и 'растуће' иде од нуле до $+\infty$.

[1]Ако је $f(x) = (x^2 - x)g(x)$, тада је $g'(x) = e^{\frac{1}{1-x}}/(1-x)^2$, па је

$$f'(x) = (2x-1)g(x) + (x^2 - x)g'(x) = \left(2x - 1 + \frac{x}{x-1}\right) g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x - 1} g(x).$$