II колоквијум 2024

1. Израчунати: $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1-82\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати запремину тела насталог ротацијом фигуре ограничене линијама $x^2+y^2=3$, $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $x=\sqrt{3}$, $(y\ge 0)$ око Oy осе.

3. Израчунати:

$$\iint\limits_D \frac{x+2}{y-1}\cdot\cos(x^2+y^2+4x-2y+5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је $D=\{(x,y):(x+2)^2+(y-1)^2\le \dfrac{\pi}{6},\ -2\le x\le y-3\}$.

Решења:

1. Уводећи смену $t^2=\operatorname{tg} x$, одакле је $\sin^2 x=\dfrac{t^4}{1+t^4}$ и $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$, добијамо

$$\begin{aligned}\int \frac{2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\sqrt{\operatorname{tg} x}}{1-82\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cdot\dfrac{1}{t}+t}{1-\dfrac{82t^4}{1+t^4}}\cdot\frac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{t^2+2}{1-81t^4}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int\frac{t^2+2}{(1-3t)(1+3t)(1+9t^2)}\,\mathrm{d}t = I.\end{aligned}\tag{1}$$

Искористићемо такозвану методу неодређених коефицијената: Из

$$\frac{t^2+2}{(1-3t)(1+3t)(1+9t^2)}=\frac{A}{1-3t}+\frac{B}{1+3t}+\frac{Ct+D}{1+9t^2}$$

добијамо систем једначина:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrl} A & + & B & & & + & D & =2\\ 3A & - & 3B & + & C & & & =0\\ 9A & + & 9B & & & - & 9D & =1\\ 27A & - & 27B & - & 9C & & & =0\end{array}\right\},$$

чијим решавањем одређујемо коефицијенте $A=B=\dfrac{19}{36}$, $C=0$ и $D=\dfrac{17}{18}$.

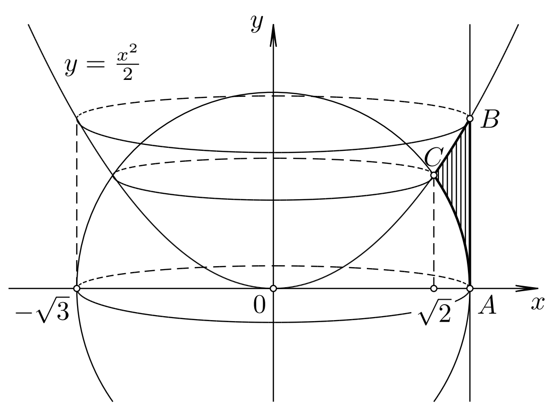
Враћајући се у (1) добијамо

$$\begin{aligned}
I &= 2\left(\frac{19}{36}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-3t}+\frac{19}{36}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+3t}+\frac{17}{18}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+9t^2}\right)\\
&= \frac{19}{18}\ln|1-3t|\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{19}{18}\ln|1+3t|\cdot\frac{1}{3}+\frac{17}{9}\operatorname{arctg}(3t)\cdot\frac{1}{3}+C\\
&= \frac{19}{54}\ln\left|\frac{1+3t}{1-3t}\right|+\frac{17}{27}\operatorname{arctg}(3t)+C\\
&= \frac{19}{54}\ln\left|\frac{1+3\sqrt{\operatorname{tg}x}}{1-3\sqrt{\operatorname{tg}x}}\right|+\frac{17}{27}\operatorname{arctg}(3\sqrt{\operatorname{tg}x})+C.
\end{aligned}$$

2. Одредимо најпре пресечне тачке датог круга са датом параболом: За тачке параболе је испуњено $y=\dfrac{x^2}{2}$, односно $x^2=2y$, па за тачку која припада и кругу важи

$$2y+y^2=3 \Leftrightarrow y^2+2y-3=0 \Leftrightarrow y=-3 \ \vee\ y=1.$$

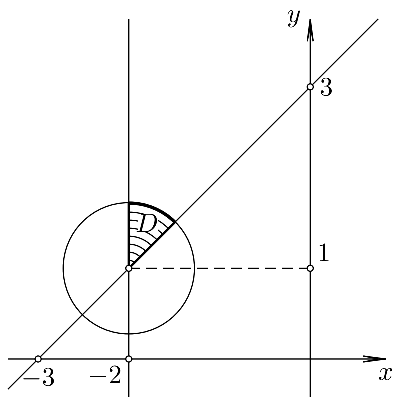
Јасно је да је једино могуће $y=1$, одакле је $x=-\sqrt{2}$ или $x=\sqrt{2}$. Парабола и права $x=\sqrt{3}$ се секу у тачки $(\sqrt{3},3/2)$. На слици је означен део равни који ротира око Oy осе. Посебнуто су истакнуте тачке $A(\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},3/2)$ и $C(\sqrt{2},1)$.



Нека је V_1 запремина тела које настаје ротацијом дужи AB око Oy осе. Даље, нека је V_2 запремина тела које настаје ротацијом кружног лука одређеног тачкама A и C око Oy осе. Коначно, нека је V_3 запремина тела које настаје ротацијом лука параболе око Oy осе који је одређен тачкама C и B. Тражена запремина је:

$$\begin{aligned}
V=V_1-V_2-V_3&=(\sqrt{3})^2\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi-\pi\int_0^1(3-y^2)\,\mathrm{d}y-\pi\int_1^{3/2}2y\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{9\pi}{2}-\pi\left(3y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1-\pi\cdot y^2\Big|_1^{3/2}=\frac{9\pi}{2}-\frac{8\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}.
\end{aligned}$$

3. Област D је означена на слици:



Преласком на померене поларне координате ($x = -2 + \rho\cos\varphi,\ y = 1 + \rho\sin\varphi,\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$) област D се пресликава на област $D' = \Big\{(\rho,\varphi) \mid 0 \le \rho \le \sqrt{\pi/6},\ \ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2\Big\}$, а за тражени интеграл добијамо:

$$\iint\limits_D \frac{x+2}{y-1} \cdot \cos(x^2+y^2+4x-2y+5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi} \cdot \cos\rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\pi/6}} \rho\cos\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \ln|\sin\varphi|\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2}\sin\rho^2\Big|_0^{\sqrt{\pi/6}} = \frac{\ln 2}{8}.$$