II колоквијум 2026

1. Израчунати $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати површину равне фигуре ограничене кривом $y = \sin^3 x + \dfrac{1}{\sin x}$ и правама $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 0$.

3. Израчунати:

$$\iint\limits_D (x-2y)e^{3x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

где је D област ограничена правама $y = 3x+1$, $y = -3x$, $x = 3y+3$ и $y = -3x+2$.

Решења:

1. Применом парцијалне интеграције, за $u = \operatorname{arctg} x$ и $\mathrm{d}v = \dfrac{x}{(x^2+3)^2}$, односно $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ и $v = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+3}$, добијамо

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+3)^2}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(x^2+3)} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+3)}\\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(x^2+3)} + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+3}\\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(x^2+3)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

2. Тражену површину можемо да израчунамо на следећи начин:

$$\begin{aligned}P &= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin^3 x + \frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\begin{array}{c} t = \cos x\\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x\end{array}\right] = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{0}\left(1 - t^2 + \frac{1}{1-t^2}\right)(-\,\mathrm{d}t)\\ &= -\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2}\left(1 - t^2 + \frac{\frac{1}{2}}{t+1} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{12} + \ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

3. Дата област се може записати као $D = \{(x,y) \mid 1 \le x - 3y \le 3,\ 0 \le 3x + y \le 2\}$. Увођењем смене $u = x - 3y$, $v = 3x + y$, одакле се једноставно добија $x = \dfrac{u+3v}{10}$ и $y = \dfrac{-3u+v}{10}$, дата област се слика у правоугаоник $D' = \{(u,v) \mid 1 \le u \le 3,\ 0 \le v \le 2\}$.

Пошто је $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \dfrac{1}{10}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, и $x - 2y = \dfrac{7u+v}{10}$, то за наш интеграл добијамо:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-2y)e^{3x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{10}\int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^2 \frac{7u+v}{10}e^v\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{100}\int\limits_1^3 \left(7u\int\limits_0^2 e^v\,\mathrm{d}v + \int\limits_0^2 ve^v\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{100}\int\limits_1^3 \Big(7u\cdot e^v\Big|_0^2 + (v-1)e^v\Big|_0^2\Big)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{100}\int\limits_1^3 \big(7(e^2-1)u + e^2 + 1\big)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{100}\left(7(e^2-1)\cdot\frac{u^2}{2} + (e^2+1)u\right)\Bigg|_1^3 = \frac{15e^2-13}{50}.
\end{aligned}$$