Интеграл функције комплексне променљиве

За функцију $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ дату са $f(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in [a,b]$, интеграл се дефинише као

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int\limits_a^b v(t)\,\mathrm{d}t,$$

где су u и v две интеграбилне функције на $[a,b]$. Ако је γ глатка крива у комплексној равни, дата са $\gamma = \{z(t) \mid z(t) = x(t) + iy(t),\, t \in [a,b]\}$ и f непрекидна комплексна функција дефинисана на γ, тада се интеграл функције f дуж криве γ дефинише као

$$\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ако су f и g интеграбилне дуж криве γ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тада важи

$$\int\limits_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,\mathrm{d}z = \alpha\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \beta\int\limits_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ако је функција f интеграбилна на кривама γ_1 и γ_2, и при томе се крај криве γ_1 поклапа са почетком криве γ_2, тада је

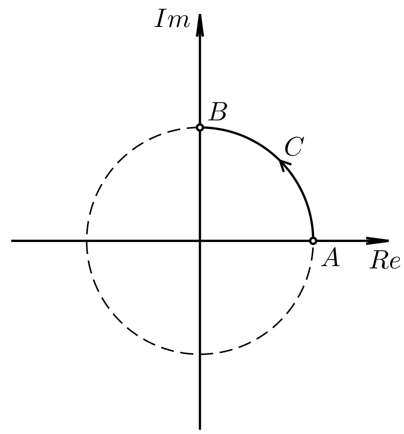
$$\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

У задацима ћемо увек имати прецизирану оријентацију криве дуж које се одређује вредност интеграла. Уколико је крива која је дата нека контура C која ограничава област D, онда је позитивна оријентација она оријентација таква да кад ,,обилазимо" контуру, област D увек остаје са леве стране. Супротна оријентација је негативна. Промена оријенатције криве мења знак интеграла.

1. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{d}z$, где је $C = \{z \mid z = 3e^{it},\ \ t \in [0, \pi/2]\}$.

Решење. Ако је $z = x + iy$, тада је $x = 3\cos t$ и $y = 3\sin t$, односно $\mathrm{d}z = (-3\sin t + i \cdot 3\cos t)\,\mathrm{d}t$ и $\mathrm{Im}(z) = 3\sin t$, одакле је

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C+} \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\widehat{AB}} \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_0^{\pi/2} 3\sin t \cdot 3(-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 9\left(-\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\,\mathrm{d}t + i\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 9\left(-\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t + i\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}(\sin t)\right) \\
&= 9\left(-\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + i \cdot \frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = 9\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\right).
\end{aligned}$$

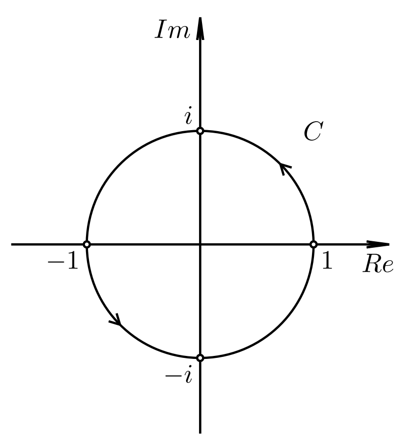


$\square$

2. Израчунати $\int_{C^+} (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z))\, \mathrm{d}z$, где је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење. Важи $C = \{e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$, па из $z = \cos t + i \sin t$ следи $\mathrm{d}z = (-\sin t + i \cos t)$. Даље је

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z))\, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)(-\sin t + i \cos t)\, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, \mathrm{d}t + i \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, \mathrm{d}t + i \int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{i}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} + i \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\pi(-1 + i).
\end{aligned}$$



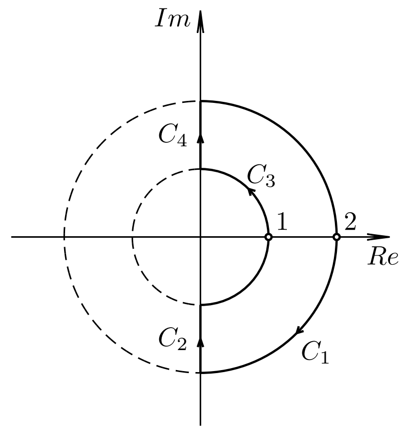
$\square$

3. Израчунати $\int_{C^-} \frac{\bar{z}}{z}\,\mathrm{d}z$, где је $C = \{z \mid 1 < |z| < 2,\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Решење. Криву C ћемо изделити на четири дела, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, као на слици. Одатле ће важити

$$\int\limits_{C^-} \frac{\bar{z}}{z}\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

при чему ћемо интеграле $I_1, ..., I_4$ одредити у наставку.



1. C_1 : Овде ћемо криву параметризовати као да је оријентација позитивна, па ћемо то касније контролисати знаком минус испред интеграла. Важи $z = 2e^{it}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, одакле је $\mathrm{d}z = 2ie^{it}$, $\bar{z} = 2e^{-it}$, па имамо да је

$$I_1 = -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2e^{-it}}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = -2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i\sin t)\,\mathrm{d}t = -2i(\sin t + i\cos t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -4i.$$

2. C_2: Важи $z = it$, $t \in [-2, -1]$, одакле је $\mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}t$, $\bar{z} = -it$. Даље је

$$I_2 = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{-it}{it} \cdot i\,\mathrm{d}t = -i\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}t = -i.$$

3. C_3: $z = e^{it}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, одакле је $\mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t$ и $\bar{z} = e^{-it}$, па је

$$I_3 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-it}}{e^{it}} \cdot ie^{it}\,\mathrm{d}t = i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i\sin t)\,\mathrm{d}t = i(\sin t + i\cos t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2i.$$

4. C_4: Важи $z = it$, $t \in [1, 2]$, па је, као у другом случају,

$$I_4 = \int\limits_{1}^{2} \frac{-it}{it} \cdot i\,\mathrm{d}t = -i\int\limits_{1}^{2} \mathrm{d}t = -i.$$

Коначно, важи

$$\int\limits_{C^-} \frac{\bar{z}}{z}\,\mathrm{d}z = -4i - i + 2i - i = -4i$$

□

4. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z$, ако је C граница области $D = \{x + iy \mid x^2 + y^2 < -2x,\ x^2 + y^2 < 2y\}$.

Решење.

Видимо најпре да је

$$x^2 + y^2 < -2x \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 < 1,$$

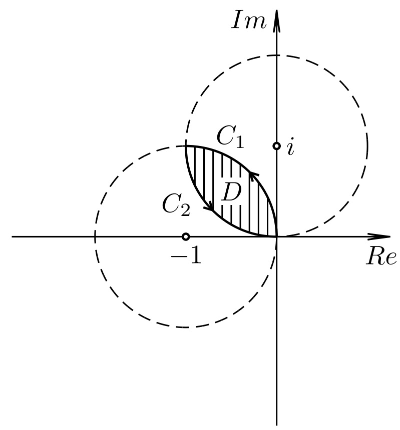
односно

$$x^2 + y^2 < 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 < 1.$$

Област D је означена на слици. Границу C можемо поделити на два дела, $C = C_1 \cup C_2$, тако да је

$$I = \int\limits_{C^+} \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2,$$

где су I_1 и I_2 вредности интеграла дуж крива C_1 и C_2.



1. C_1: Имамо да је $x = -1 + \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, односно $z = -1 + \cos t + i \sin t$, одакле је $\mathrm{d}z = (-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t$ и $\mathrm{Re}(z) = -1 + \cos t$. Одатле следи

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^{\pi/2} (-1 + \cos t)(-\sin t + i \cos t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t - \sin t \cos t - i \cos t + i \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(-\cos t - \frac{\sin^2 t}{2} - i \sin t + \frac{i}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \end{aligned}$$

2. C_2: Важи $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, односно $z = \cos t + i(1 + \sin t)$, $t \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, одакле је $\mathrm{d}z = (-\sin t + i \cos t)\,\mathrm{d}t$ и $\mathrm{Re}(z) = -\cos t$, па важи

$$I_2 = \int\limits_\pi^{3\pi/2} \cos t(-\sin t + i \cos t)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{\sin^2 t}{2} + \frac{i}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right)\Bigg|_\pi^{3\pi/2} = \frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4}. \tag{21}$$

На основу претходних резултата, добијамо да је

$$I = I_1 + I_2 = 1 + i\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

□

Сингуларне тачке комплексне функције и резидууми

Тачке у којима функција $f(z)$ није аналитичка називају се **сингуларним** тачкама. Тачка z_0 је изолована сингуларна тачка или *изоловани сингуларитет* функције $f(z)$ ако је та функција аналитичка у свим тачкама неке околине тачке z_0 сем у самој тачки z_0. Изоловани сингуларитет z_0 је:

- *отклоњив сингуларитет* ако је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a \neq \infty$;
- *пол* ако је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
- *есенцијални сингуларитет* ако $\lim\limits_{z\to z_0}$ не постоји.

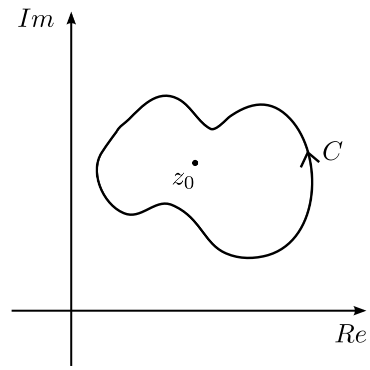
Пол z_0 је пол реда n ако је $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = w_0 \neq 0$. Пол 1. реда се назива и *простим* полом.

Нека је z_0 изоловани сингуларитет функције $f(z)$. Резидуум функције $f(z)$ у тачки z_0 се дефинише као

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

где је C контура која ограничава област у којој се налази тачка z_0, а $f(z)$ је аналитичка у свим тачкама неке области која садржи C, сем у тачки z_0. Из претходне формуле директно следи да је

$$\int\limits_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$



Важи и општије од претходног: Ако су $z_1, ..., z_n$ сви сингуларитети из области коју ограничава контура C, тада је

$$\int\limits_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

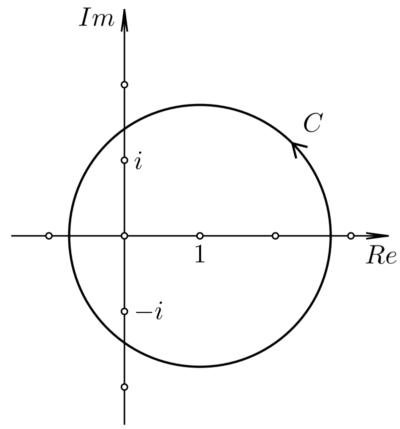
Видимо да нам претходна формула омогућава да израчунамо неке интеграле функције комплексне променљиве преко резидуума. Било би згодно ако бисмо могли некако и саме резидууме да рачунамо. На срећу, можемо:

- Ако је z_0 отклоњив сингуларитет, онда је $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$;
- Ако је z_0 пол реда n, онда је $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}$.

  Специјално, за $n=1$ је $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$.

5. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$, ако је $C = \{x+iy \mid x^2+y^2 = 2x+2\}$.

Решење. Најпре, из $x^2+y^2 = 2x+2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 3$ закључујемо да је C кружница у комплексној равни као на датој слици.



Видимо да функција $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$ има сингуларитете у тачкама $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ и $z_4 = -1$, међутим, тачка z_4 не припада делу равни ограниченом контуром C. За преостале тачке је јасно да су у питању полови.

1° Важи $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2(z^2+1)} = \infty$, па тачка $z_1 = 1$ није пол 1. реда. Са друге стране, из

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)} = \frac{1}{8} \neq 0,$$

следи да је $z_1 = 1$ пол 2. реда. Резидуум рачунамо по формули:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\big((z-1)^2 f(z)\big)' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}\right)' \\ &= \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+1)^2-(z^2+1)}{(z+1)^2(z^2+1)}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{(z+1)^2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(-\frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{2}{(z+1)^3}\right) = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2° Важи $\lim\limits_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim\limits_{z\to i}\dfrac{z}{(z^2-1)^2(z+i)} = \dfrac{i}{4\cdot 2i} = \dfrac{1}{8} \neq 0$, одакле закључујемо да је $z_2 = i$ пол 1. реда и важи $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z) = \dfrac{1}{8}$.

3° Важи $\lim\limits_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z}{(z^2-1)^2(z-i)} = \dfrac{-i}{4\cdot(-2i)} = \dfrac{1}{8} \neq 0$, одакле закључујемо да је $z_3 = -i$ пол 1. реда и важи $\operatorname*{Res}\limits_{z=-i} f(z) = \dfrac{1}{8}$.

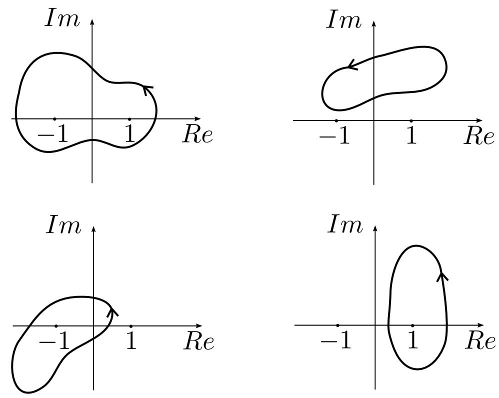
На основу претходног закључујемо да важи

$$\int\limits_{C^+}\frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi i}{4}.$$

□

6. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-1)^2}$, ако је C контура која не садржи тачке 1 и −1.

Решење. Сингуларне тачке подинтегралне функције $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ су $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. У зависности од саме контуре, свака од тих тачака може али и не мора припадати области D коју затвара контура C. Могуће ситуације су представљене на слици.



Свакако је јасно да су обе тачке полови, па ћемо најпре да одредимо резидууме за обе тачке.

1° $z_1 = 1$: Важи

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{z+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

одакле следи да је $z_1 = 1$ пол 3. реда. Стога, имамо да је

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3\cdot\frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{z^2}{z+1}\right)''\\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left(\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)^3} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

2° $z_2 = -1$: На основу

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{8} \neq 0$$

следи да је $z_2 = -1$ пол 1. реда, те је $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = -\dfrac{1}{8}$.

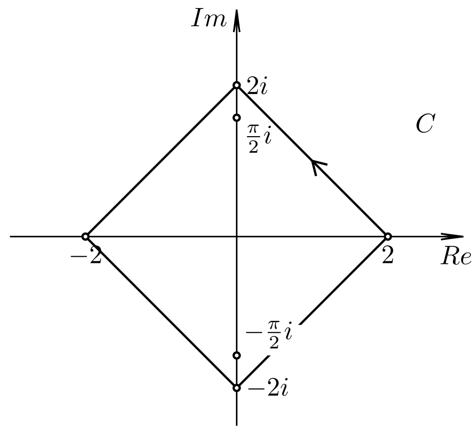
За вредност траженог интеграла сада разликујемо следећа четири случаја, у складу са дискусијом са почетка решење:

1. $z_1, z_2 \in D$: На основу Кошијеве теореме о резидуумима, важи
$$\int_{C^+}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-1)^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right) = 0.$$
2. $z_1, z_2 \notin D$: У овом случају (на основу Кошијеве теореме) вредност интеграла је 0.
3. $z_1 \notin D$, $z_2 \in D$: Сада је $\displaystyle\int_{C^+}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-1)^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi i}{4}$.
4. $z_1 \in D$, $z_2 \notin D$: Сада је $\displaystyle\int_{C^+}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-1)^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi i}{4}$.

□

7. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^z\,\mathrm{d}z}{\operatorname{ch} z}$, ако је $C = \{x+iy \mid |x|+|y| = 2\}$.

Решење. Одредимо прво сингуларне тачке: Из $\operatorname{ch} z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^z+e^{-z}}{2} = 0$ добијамо да је $e^{2z} = -1$, одакле је $2z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, односно $z = i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Области D коју затвара крива C припадају тачке $z_1 = \dfrac{\pi}{2}i$ и $z_2 = -\dfrac{\pi}{2}i$.



Обе тачке су полови првог реда јер важи

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\frac{z-\frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z}\cdot e^z = i\lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\frac{z-\frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z} \underset{\text{л.п.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} i\lim_{z\to\frac{\pi}{2}i}\frac{1}{\operatorname{sh} z} = 1,$$

односно

$$\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\left(z+\frac{\pi}{2}i\right)f(z) = \lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{z+\frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z}\cdot e^z = -i\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{z+\frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z} \underset{\text{л.п.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} -i\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{1}{\operatorname{sh} z} = 1,$$

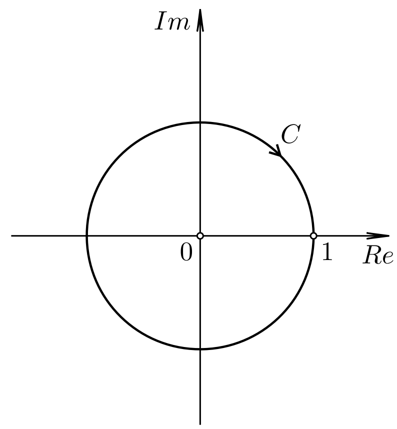
па важи $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}i} f(z) = 1$, односно $\displaystyle\int_{C^+}\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{\operatorname{ch} z} = 2\pi i(1+1) = 4\pi i.$ □

8. Израчунати $\displaystyle\int_{C^-}\frac{\mathrm{d}z}{z^2\sin z}$, ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење. Најпре, имамо

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz}-1 = 0 \Leftrightarrow 2iz = \operatorname{Ln}(1) = \ln 1 + i\operatorname{Arg}(1) = i\cdot 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

па добијамо да је $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Једино $z = 0$ припада области коју затвара контура C, и то је уједно и једина сингуларна тачка дате функције у тој области.



Тачка $z=0$ је пол 3. реда, јер важи

$$\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1 \neq 0,$$

а за резидуум важи

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{z}{\sin z}\Big)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{z\sin^2 z + 2z\cos^2 z - 2\sin z\cos z}{\sin^3 z}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{z(1+\cos^2 z) - 2\sin z\cos z}{\sin^3 z} = \frac{1}{4}\lim_{z\to 0}\frac{3z + z\cos 2z - 2\sin 2z}{\sin^3 z}\\
&\underset{\text{л.п.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \frac{1}{4}\lim_{z\to 0}\frac{3+\cos 2z - 2z\sin 2z - 4\cos 2z}{3\sin^2 z\cos z} = \frac{1}{12}\lim_{z\to 0}\frac{3 - 3\cos 2z - 2z\sin 2z}{\sin^2 z\cos z}\\
&\underset{\text{л.п.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \frac{1}{12}\lim_{z\to 0}\frac{6\sin 2z - 2\sin 2z - 4z\cos 2z}{2\sin z\cos^2 z - \sin^3 z} = \frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{\sin 2z - z\cos 2z}{2\sin z\cos^2 z - \sin^3 z}\\
&\underset{\text{л.п.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \frac{1}{3}\lim_{z\to 0}\frac{2\cos 2z - \cos 2z + 2z\sin 2z}{2\cos^3 z - 4\sin^2 z\cos z - 3\sin^2 z\cos z} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Сада директно следи да је $\displaystyle\int_{C^-}\frac{\mathrm{d}z}{z^2\sin z} = -2\pi i\cdot\frac{1}{6} = -\frac{\pi i}{3}.$ □

9. Израчунати $\displaystyle\int_{C^+}\frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$, ако је $C = \{z \mid |z+1| = \sqrt{2}\}$.

Решење. Сингуларне тачке подинтегралне функције $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3\cos z}$ добијамо из услова $z^3\cos z = 0$. Имамо $z_1 = 0$, док остале тражимо из услова $\cos z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1$, одакле је $z = \dfrac{1}{2}(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Нова сингуларна тачка која припада области коју затвара контура C је $z_2 = -\frac{\pi}{2}$. Обе тачка су полови (зашто?), при чему је $z_1 = 0$ пол 2. реда:

$$\lim_{z\to 0} z^2\cdot f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{\cos z} = 1 \neq 0.$$

Даље је

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\operatorname{tg} z}{z^3}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z\cos z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z\cos z}{z^2\cos^2 z}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z\cos^2 z - z^2\frac{\sin 2z}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{z\to 0}\frac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z - 2z\sin z\cos z - z\sin 2z - z^2\cos 2z} = 0.$$

Тачка $z_2 = -\frac{\pi}{2}$ је пол 1. реда јер је испуњено

$$\lim_{z\to -\frac{\pi}{2}}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\operatorname{tg} z}{z^3} = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z}{z^3}\cdot\frac{z+\frac{\pi}{2}}{\cos z} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \frac{8}{\pi^3}\lim_{z\to -\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z} = \frac{8}{\pi^3} \neq 0,$$

па је и $\operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) = \dfrac{8}{\pi^3}$.

Коначно, вредност траженог интеграла је

$$\int_{C^+}\frac{\operatorname{tg} z}{z^3} = 2\pi i\left(0+\frac{8}{\pi^3}\right) = \frac{16 i}{\pi^2}.$$

$\square$