Извод функције

Нека je функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека je $x \in (a, b)$.

Извод функције

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$.

Извод функције

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x.

Извод функције

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x.

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x. Тада важи:

Извод функције

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x.

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x. Тада важи:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

Извод функције

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x.

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x. Тада важи:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(cf(x))' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$;

Извод функције

Нека je функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека je $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да je функција диференцијабилна у тачки x.

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x. Тада важи:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(cf(x))' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$;
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x.

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x. Тада важи:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(cf(x))' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$;
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Извод функције

Ако функција f има извод у тачки x, а функција g има извод у тачки $y = f(x)$, тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x).$$

Извод функције

Ако функција f има извод у тачки x, а функција g има извод у тачки $y = f(x)$, тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x).$$

Уколико је функција f диференцијабилна у свакој тачки интервала (a, b), тада можемо говорити о новој функцији $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$. Та функција такође може имати извод у некој тачки x, при чему бисмо онда рекли да је то други извод почетне функције f у тачки x, односно $f''(x) = (f')'$.

Ако функција f има извод у тачки x, а функција g има извод у тачки $y = f(x)$, тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x).$$

Уколико је функција f диференцијабилна у свакој тачки интервала (a, b), тада можемо говорити о новој функцији $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$. Та функција такође може имати извод у некој тачки x, при чему бисмо онда рекли да је то други извод почетне функције f у тачки x, односно $f''(x) = (f')'$. Аналогно је за остале изводе вишег реда.

Локални екстремуми

Локални екстремуми

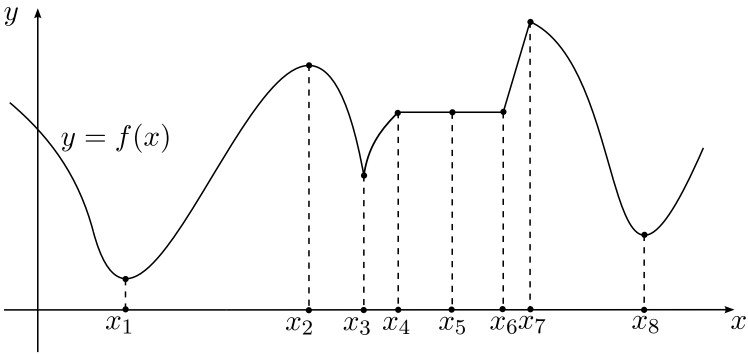
Ако постоји околина U тачке c таква да за свако $x \in U$ важи $f(x) \leq f(c)$ (односно $f(x) < f(c)$), тада функција f има локални максимум (односно строги локални максимум) у тачки c.

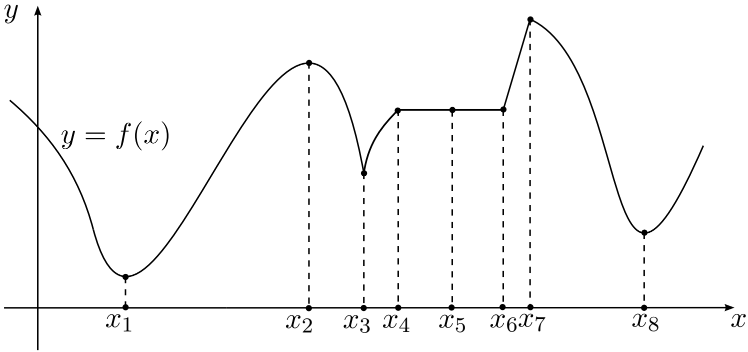
Локални екстремуми

Ако постоји околина U тачке c таква да за свако $x \in U$ важи $f(x) \leq f(c)$ (односно $f(x) < f(c)$), тада функција f има локални максимум (односно строги локални максимум) у тачки c.

Слично се дефинише и локални минимум $((\forall x \in U) f(c) \leq f(x))$, односно строги локални минимум $(f(c) < f(x))$.

Локални екстремуми





Видимо да у датом примеру функција има строги локални минимум у тачкама x_1, x_3 и x_8, а строги локални максимум у тачкама x_2 и x_7. Локални минимум је такође и у тачкама x_6 и x_5, док је локални максимум у x_4 и у x_5.

Монотоност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

Монотоност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ je на интервалу $(a, b) \subset A$:

1. **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,

Монотоност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

1. **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
2. **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

Монотоност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

1. **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
2. **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
3. **опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

Монотоност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

1. **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
2. **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
3. **опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
4. **строго опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Монотоност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ je на интервалу $(a, b) \subset A$:

1. **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
2. **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
3. **опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
4. **строго опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ако функција има било коју од наведених особина, за њу кажемо да је **монотона.**

Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b),

Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b),
2. $f'(x) > 0$, тада је функција f строго растућа на (a, b),

Нека је функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a,b)\subset A$. Ако за свако $x\in(a,b)$ важи

1. $f'(x)\geq 0$, тада је функција f растућа на (a,b),
2. $f'(x)>0$, тада је функција f строго растућа на (a,b),
3. $f'(x)\leq 0$, тада је функција f опадајућа на (a,b),

Нека је функција $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b),
2. $f'(x) > 0$, тада је функција f строго растућа на (a, b),
3. $f'(x) \leq 0$, тада је функција f опадајућа на (a, b),
4. $f'(x) < 0$, тада је функција f строго опадајућа на (a, b).

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\mathring{U}(c)$. Тада имамо:

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

1. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c.

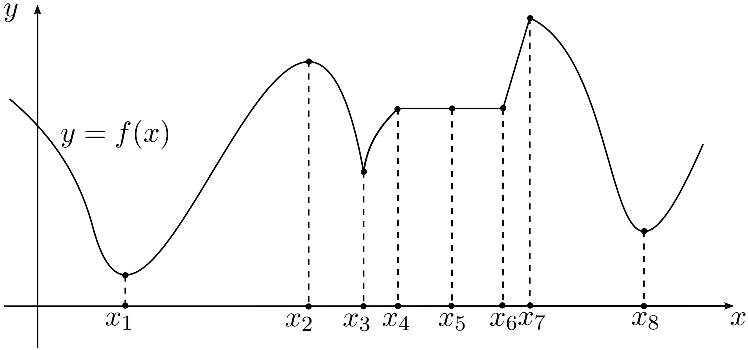
Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

1. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c.
2. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) > 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) < 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални максимум у тачки c.

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

1. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c.
2. Ако за $x \in U$ важи $f'(x) > 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) < 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални максимум у тачки c.

Кандидате за локалне екстремуме ћемо тражити међу тачкама у којима је $f'(x) = 0$ и онима у којима први извод није дефинисан.



На којим интервалима је функција растућа/строго растућа/опадајућа/строго опадајућа?

Шта се може рећи о првом изводу функције у тачкама у којима функција има локални екстремум?

Конвексност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2). \tag{1}$$

Конвексност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2). \quad (1)$$

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је **конкавна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2). \quad (2)$$

Конвексност функције

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ je **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

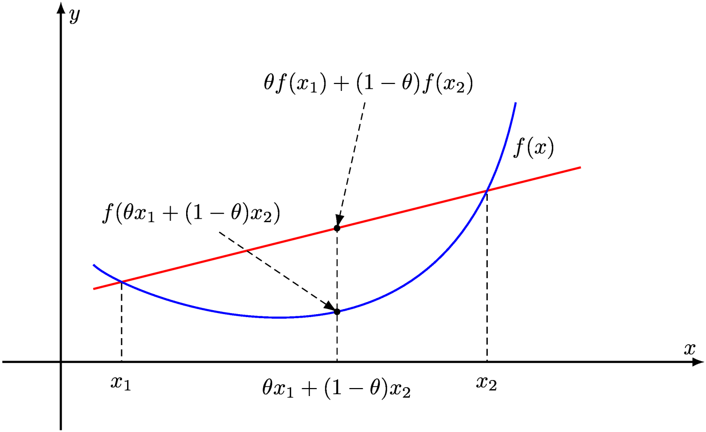
$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2). \tag{1}$$

Функција $f : A \to \mathbb{R}$ je **конкавна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2). \tag{2}$$

Ако у (1), односно (2) стоје стоги знаци неједнакости, онда је функција f строго конвексна, односно строго конкавна.

Конвексна функција



Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b),

Конвексност/конкавност/превојна тачка

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b),
2. $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b),

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b),
2. $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b),
3. $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b),

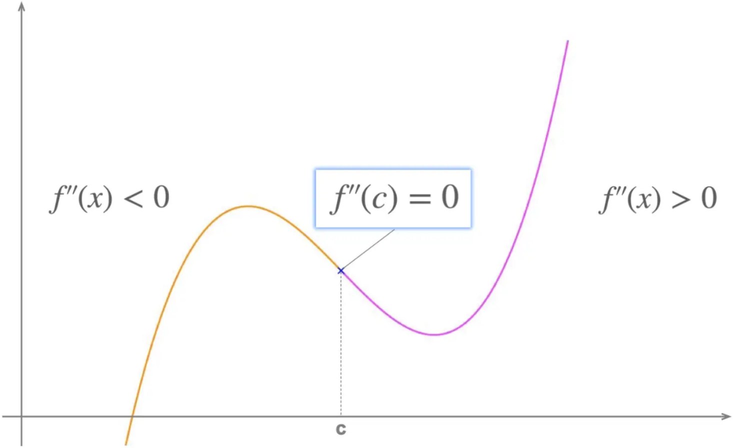
Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b),
2. $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b),
3. $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b),
4. $f''(x) < 0$, тада је функција f строго конкавна на (a, b).

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

1. $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b),
2. $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b),
3. $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b),
4. $f''(x) < 0$, тада је функција f строго конкавна на (a, b).

Нека је функција f дефинисана у околини тачке c. Тачка $P(c, f(c))$ је **превојна тачка** криве $y = f(x)$ ако постоји околина тачке c у којој је функција строго конвексна за $x < c$ а строго конкавна за $x > c$ или обрнуто.


$f''(x) < 0$
$f''(c) = 0$
$f''(x) > 0$
c

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
2. $g'(x) \neq 0$, за $x \in \overset{\circ}{U}(a)$,

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
2. $g'(x) \neq 0$, за $x \in \overset{\circ}{U}(a)$,
3. постоји $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\mathring{U}(a)$ тачке a и нека је:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$,
2. $g'(x) \neq 0$, за $x \in \mathring{U}(a)$,
3. постоји $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тада је

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$