Лапласова трансформација

Лапласовом трансформацијом $\mathscr{L}$ се функцији $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (оригинал) придружује функција $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (слика) која се дефинише као

$$F(s) = \mathscr{L}(f(t)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

при чему је функција F дефинисана за свако $s \in \mathbb{C}$ за које претходни несвојствени интеграл конвергира. Уколико тај интеграл не конвергира ни за једно $s \in \mathbb{C}$, кажемо да не постоји Лапласова слика функције $f(t)$.

Теорема: Ако је $f(t)$ дефинисана на $[0, +\infty)$, има највише коначно много прекида прве врсте на сваком подинтервалу од $[0, +\infty)$ и ако постоје константе M и a такве да је $|f(t)| < Me^{at}$, $t \geq 0$, тада интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ конвергира, односно $\mathscr{L}(f(t))$ постоји, за свако s такво да је $\mathrm{Re}\, s > a$. Штавише, функције $F(s)$ је тада аналитичка у полуравни $\mathrm{Re}\, s > a$.

Особине Лапласове трансформације

Нека су $f(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, ..., n$ оригинали и $F(s)$, $F_i(t)$, $i = 1, ..., n$ њихове слике добијене Лапласовом трансформацијом. Тада важи:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s), \\
f(at) &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0, \\
e^{at} f(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} F(s-a), \\
f(t-a) &\xrightarrow{\mathscr{L}} e^{-as} F(s), \\
t f(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} -F'(s), \\
t^n f(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)^n F^{(n)}(s), \\
\frac{f(t)}{t} &\xrightarrow{\mathscr{L}} \int\limits_s^{\infty} F(p)\,\mathrm{d}p, \\
\int\limits_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{F(s)}{s}, \\
f'(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} sF(s) - F(0), \\
f^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathscr{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Битна операција коју ћемо дефинисати је операција конволуције две функције:

$$(f_1 * f_2)(t) = f_1(t) * f_2(t) := \int\limits_0^t f_1(t-x) f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

и значајна особина Лапласове трансформације је у вези са конволуцијом:

$$(f_1 * f_2)(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F_1(s) \cdot F_2(s).$$

Основне Лапласове трансформације које ћемо користити у даљем раду су:

$$
\begin{aligned}
1 &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0,\\
t^n &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0,\ n \in \mathbb{N}\\
e^{at} &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > a,\\
\sin at &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0,\\
\cos at &\xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.
\end{aligned}
$$

1. Одредити $\mathscr{L}(f)$ ако је:

а) $f(t) = \operatorname{sh} at$,

б) $f(t) = \operatorname{ch} at$.

Решење. Користећи дефиницију хиперболичког синуса и косинуса, добијамо да је

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2} = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2-a^2},$$

односно

$$\operatorname{ch} at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} = \frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2-a^2}.$$

□

2. Одредити $\mathscr{L}(f)$ ако је $f(t) = \cos^3 t$.

Решење. Важи

$$
\begin{aligned}
\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\big(e^{3it} + 3e^{2it}\cdot e^{-it} + 3e^{it}\cdot e^{-2it} + e^{-3it}\big)\\
&= \frac{1}{8}\left(2\cdot\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} + 3\cdot 2\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{8}(2\cos 3t + 6\cos t)\\
&= \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t,
\end{aligned}
$$

одакле је $\mathscr{L}\big(\cos^3 t\big) = \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+1}$. □

3. Одредити $\mathscr{L}(f)$ ако је $f(t) = e^{-t}\cos^2 t$.

Решење. Ако је $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, тада из особина Лапласове трансформације знамо да важи $e^{at}f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s-a)$, па треба најпре одредити $\mathscr{L}(\cos^2 t)$. Важи

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)},$$

одакле је $\mathscr{L}(e^{-t}\cos^2 t) = \dfrac{(s+1)^2+2}{(s+1)((s+1)^2+4)} = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)}$. □

4. Одредити $\mathscr{L}(f)$ ако је $f(t) = t^2 \sin at$.

Решење. Ако је $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, тада из особина Лапласове трансформације знамо да важи $t^n f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)^n F^{(n)}(s)$, па је

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(t^2\sin at) &= \left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'' = a\left(\frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}\right)' \\ &= -2a\cdot\frac{(s^2+a^2)^2 - s\cdot 2(s^2+a^2)\cdot 2s}{(s^2+a^2)^4} = \frac{-2a(a^2-3s^2)}{(s^2+a^2)^3}.\end{aligned}$$

□

5. Одредити $\mathscr{L}(f)$ ако је $f(t) = \dfrac{e^{-at}}{t}\sin bt$.

Решење. Одредимо најпре $\mathscr{L}\left(\dfrac{\sin bt}{t}\right)$: Ако је $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, тада из особина Лапласове трансформације знамо да важи $\dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \int\limits_s^\infty F(z)\,\mathrm{d}z$, па имамо

$$\frac{\sin bt}{t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \int\limits_s^\infty \frac{b}{z^2+b^2}\,\mathrm{d}z = b\cdot\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{z}{b}\bigg|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b},$$

одакле је $\mathscr{L}\left(e^{-at}\dfrac{\sin bt}{t}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{s+a}{b}$. □

6. Одредити $\mathscr{L}(f)$ ако је:

а) $f(t) = \int\limits_0^t (t-x)e^x\,\mathrm{d}x$,

б) $f(t) = \int\limits_0^t \cos(t-x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

в) $f(t) = \int\limits_0^t \sin x\,\mathrm{d}x$.

Решење. Сва три примера ћемо решавати користећи Лапласову трансформацију за конволуцију две функције:

а)

$$f(t) = t * e^t \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}(t) \cdot \mathscr{L}(e^t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1};$$

б)

$$f(t) = \cos t * \cos t \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}(\cos t) \cdot \mathscr{L}(\cos t) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2};$$

в)

$$f(t) = \int_1^t 1 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = 1 * \sin t \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}(1) \cdot \mathscr{L}(\sin t) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

□

У наредним задацима ћемо одређивати оригинале знајући слике добијене Лапласовом трансформацијом, односно одређиваћемо инверзну Лапласову трансформацију задатих функције.

Пример: Знамо да је $\mathscr{L}(\sin t) = \dfrac{1}{s^2+1}$, па је $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$.

7. Одредити $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+4}\right)$.

Решење. Пошто важи $\sin at \xrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{a}{s^2+a^2}$, то је

$$\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2} \sin 2t.$$

□

8. Одредити $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+6s+13}\right)$.

Решење. Користимо својство $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s-a)$:

$$\frac{1}{s^2+6s+13} = \frac{1}{(s+3)^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+3)^2+4} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2} e^{-3t} \sin 2t.$$

□

9. Одредити $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right)$.

Решење. Урадићемо задатак на два начина:

1. Начин: Искористимо особину конволуције:

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{2}\mathscr{L}(1)\cdot\mathscr{L}(\sin 2t) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2}(1*\sin 2t)$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^t = \frac{1-\cos 2t}{4}.$$

2. Начин: Присетимо се метода неодређених коефицијената, којег смо користили у раду са интегралима: Из

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

добијамо да мора важити $1 = (A+B)s^2 + Cs + 4A$, одакле имамо систем

$$\left.\begin{array}{rl} A + B & = 0 \\ C & = 0 \\ 4A & = 1 \end{array}\right\},$$

који се једноставно решава и чије је решење $(A,B,C) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$. Дакле, важи

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t.$$

□

10. Одредити $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$, ако је $F(s) = \dfrac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)}$.

Решење. Из

$$\frac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$$

добијамо да важи

$$2s-3 = (A+B)s^2 + (4A-B+C)s + 5A - C,$$

односно имамо систем једначина

$$\left.\begin{array}{rl} A + B & = 0 \\ 4A - B + C & = 2 \\ 5A - C & = -3 \end{array}\right\},$$

чијим решавањем добијамо да је $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{1}{10}$ и $C = \frac{5}{2}$. Дакле, важи

$$\frac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)} = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{\frac{1}{10}s + \frac{5}{2}}{(s+2)^2+1}$$
$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{10}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{23}{10}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}$$
$$\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} -\frac{1}{10}e^t + \frac{1}{10}e^{-2t}\cos t + \frac{23}{10}e^{-2t}\sin t.$$

□

11. Одредити $\mathscr{L}^{-1}(X(s))$, ако је $X(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-1}$.

Решење. Најпре, важи $s^3 - 1 = (s-1)(s^2+s+1)$, па из

$$\frac{s^2+1}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

добијамо да је

$$s^2+1 = (A+B)s^2 + (A-B+C)s + A - C,$$

те имамо систем

$$\left.\begin{array}{rrrl} A & + B & & = 1 \\ A & - B & + C & = 0 \\ A & & - C & = 1 \end{array}\right\},$$

чије је решење $(A,B,C) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Даље је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s-1}{s^2+s+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t. \end{aligned}$$

□

12. Одредити $\mathscr{L}^{-1}(Y(s))$, ако је $Y(s) = \dfrac{1}{s^3(s-1)}$.

Решење. Из $\dfrac{1}{s^3(s-1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s^3} + \dfrac{D}{s-1}$ добијамо систем

$$\left.\begin{array}{rrrrl} A & & & + D & = 0 \\ -A & + B & & & = 0 \\ & - B & + C & & = 0 \\ & & - C & & = 1 \end{array}\right\},$$

одакле је $(A,B,C,D) = (-1,-1,-1,1)$. Ако искорстимо особину $\dfrac{1}{s^n} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, онда је

$$Y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t.$$

□

Примена Лапласове трансформације

У наредним задацима ћемо примењивати Лапласову трансформацију у решавању диференцијалних једначина и система диференцијалних једначина (бавићемо се још и такозваним интегралним једначинама). Идеја је да Лапласовом трансформацијом преведемо дату једначину у алгебарску, која је знатно једноставнија за решавање. Након што одредимо њено решење, искористићемо инверзну Лапласову трансформацију да бисмо одредили решење почетног проблема. Подсетимо се да, ако је $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} F(s)$, онда је $f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$.

1. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 5t + 1$$

које задовољава услов $y(0) = 2$ и $y'(0) = 2$.

Решење. Ако је $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$, тада имамо

$$\begin{aligned}
& y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 5t + 1 \Big/^{\mathscr{L}} \\
\Rightarrow\ & s^2 Y(s) - 2s - 2 - 4(sY(s) - 2) + 5Y(s) = \frac{5}{s^2} + \frac{1}{s} \\
\Leftrightarrow\ & (s^2 - 4s + 5)Y(s) = \frac{5}{s^2} + \frac{1}{s} + 2s - 6 \\
\Leftrightarrow\ & (s^2 - 4s + 5)Y(s) = \frac{2s^3 - 6s^2 + s + 5}{s^2}.
\end{aligned}$$

Даље, из

$$Y(s) = \frac{2s^3 - 6s^2 + s + 5}{s^2(s^2 - 4s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 4s + 5}$$

добијамо систем линеарних једначина

$$\left.\begin{array}{rrrrl}
A & & +\ C & & = 2 \\
-4A & +\ B & & +\ D & = -6 \\
5A & -\ 4B & & & = 1 \\
 & 5B & & & = 5
\end{array}\right\},$$

чије је решење $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -3)$. Дакле, важи

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s - 3}{s^2 - 4s + 5} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s - 2}{(s-2)^2 + 1} - \frac{1}{(s-2)^2 + 1} \\
&\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 1 + t + e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t = y(t).
\end{aligned}$$

□

2. Применом Лапласове трансформације решити систем диференцијалних једначина

$$\left.\begin{aligned} x'(t) - y(t) = e^t \\ y'(t) + x(t) = \sin t \end{aligned}\right\},$$

ако је $x(0) = 1$ и $y(0) = 0$.

Решење. За потребе решавања овог задатка ћемо извести наредне, нешто општије, резултате: Важи

$$t \sin at \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)' = -a \cdot \frac{-2s}{(s^2+a^2)} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}. \tag{1}$$

односно

$$t \cos at \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = -\frac{s^2+a^2-2s^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2},$$

а одатле је

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2+a^2+s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+a^2} + \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin at}{a} + t\cos at\right), \end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(s^2+a^2)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2+a^2-(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+a^2} - \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right) \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin at}{a} - t\cos at\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Вратимо се сада задатку. Ако је $x(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} X(s)$ и $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$, тада ако применимо Лапласову трансформацију на дати систем, добијамо систем

$$\left.\begin{aligned} sX(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ sY(s) - 0 + X(s) &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} sX(s) - Y(s) = \frac{s}{s-1} \\ X(s) + sY(s) = \frac{1}{s^2+1} \end{aligned}\right\}.$$

Добијени систем ћемо решавати Крамеровом методом: Важи

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2+1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & -1 \\ \frac{1}{s^2+1} & s \end{vmatrix} = \frac{s^2}{s-1} + \frac{1}{s^+1}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} s & \frac{s}{s-1} \\ 1 & \frac{1}{s^2+1} \end{vmatrix} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s-1},$$

одакле је

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2},$$

односно

$$Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}.$$

На основу методе неодређених коефицијената можемо добити да је

$$\frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1},$$

а такође и

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

На основу резултата (1) и (2), важи $\mathscr{L}^{-1}\Big(\frac{s}{(s^2+1)^2}\Big) = \frac{1}{2}t\sin t$ и $\mathscr{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(s^2+1)^2}\Big) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$, одакле је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \\ &\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) \\ &= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{1}{2}t\cos t = x(t), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} \\ &\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\sin t = y(t). \end{aligned}$$

$\square$

3. Решити једначину

$$\int\limits_0^t \sin(t-x)y(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2 t.$$

Решење. Нека је $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$. Важи

$$\int\limits_0^t \sin(t-x)y(x)\,\mathrm{d}x = \sin t * y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s^2+1}Y(s),$$

као и

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{2s} - \frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+4},$$

па деловањем Лапласове трансформације на дату једначину добијамо да је

$$\frac{1}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} \;\Leftrightarrow\; Y(s) = \frac{s^2+1}{2s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s(s^2+1)}{s^2+4}.$$

Како је $s^2+1 = s^2+4-3$, то је

$$Y(s) = \cancel{\frac{s}{2}} + \frac{1}{2s} - \cancel{\frac{s}{2}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t = y(t).$$

$\square$

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y = 4\operatorname{ch} t.$$

Решење. Ако је $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$ и $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$, онда је $y''(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^2Y(s) - sC_1 - C_2$. Раније смо извели да је $\mathscr{L}(\operatorname{ch} t) = \frac{s}{s^2-1}$, па важи

$$\begin{aligned} & y'' - y = 4\operatorname{ch} t \Big/ \mathscr{L} \\ & \Rightarrow s^2Y(s) - sC_1 - C_2 - Y(s) = \frac{4s}{s^2-1} \\ & \Leftrightarrow Y(s)(s^2-1) = \frac{4s}{s^2-1} + sC_1 + C_2 \\ & \Leftrightarrow Y(s) = \frac{4s}{(s^2-1)^2} + \frac{s}{s^2-1}C_1 + \frac{1}{s^2-1}C_2. \end{aligned}$$

Изведимо опет нешто општије резултате: Важи

$$t \operatorname{ch} at \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)' = -\frac{s^2-a^2-2s^2}{(s^2-a^2)^2} = \frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2},$$

односно

$$t \operatorname{sh} at \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)' = -a \cdot \frac{-2s}{(s^2-a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2-a^2)^2},$$

одакле је $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{4s}{(s^2-1)^2}\right) = 2t \operatorname{sh} t$, па је даље

$$Y(t) = \frac{4s}{(s^2-1)^2} + \frac{s}{s^2-1}C_1 + \frac{1}{s^2-1}C_2 \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 2t\operatorname{sh} t + C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t = y(t).$$

□

5. Решити систем

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= t + \int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u \\ y(t) &= 1 + \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}\right\},$$

Решење. Нека је, стандардно, $x(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} X(s)$ и $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$. Тада је

$$\int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t 1 \cdot y(u)\,\mathrm{d}u = 1 * y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}Y(s),$$

и, аналогно, $\mathscr{L}\left(\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u\right) = \dfrac{1}{s}X(s)$, па применом Лапласове трансформације на дати систем добијамо

$$\left.\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}Y(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s}X(s) \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} s^2X(s) - sY(s) = 1 \\ -X(s) + sY(s) = 1 \end{aligned}\right\}.$$

Последњи систем ћемо решавати Крамеровом методом. Имамо да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^2 & -s \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^3 - s, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -s \\ 1 & s \end{vmatrix} = 2s, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} s^2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = s^2 + 1,$$

одакле је

$$X(s)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{2}{s^2-1}\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}2\operatorname{sh}t=x(t),$$

односно, уз примену методе неодређених коефицијената

$$Y(s)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{s_1^2}{s(s^2-1)}=-\frac{1}{s}+\frac{2s}{s^2-1}\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}-1+2\operatorname{ch}t=y(t).$$

$\square$

6. Одредити опште решење једначине

$$y'(t)+y(t)+\int\limits_0^t(t-x+1)y(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Решење. Нека је $y(0)=C_1$ и $y(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}Y(s)$. Видимо да важи

$$\int\limits_0^t(t-x+1)y(x)\,\mathrm{d}x=(t+1)*y(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)Y(s),$$

па имамо

$$\begin{aligned}
&y'(t)+y(t)+\int\limits_0^t(t-x+1)y(x)\,\mathrm{d}x=0\Big/^{\mathscr{L}}\\
&\Rightarrow sY(s)-C_1+Y(s)+\frac{s+1}{s^2}Y(s)=0\\
&\Leftrightarrow\left(s+1+\frac{s+1}{s^2}\right)Y(s)=C_1\\
&\Rightarrow Y(s)=\frac{s^2C_1}{(s+1)(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

Из

$$\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

добијамо систем

$$\left.\begin{aligned}
A+B&=1\\
B+C&=0\\
A+C&=0
\end{aligned}\right\},$$

одакле је $A=B=\frac{1}{2}$ и $C=-\frac{1}{2}$. Сада имамо да је

$$Y(s)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)C_1\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}}\left(\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t\right)C_1=y(t).$$

$\square$

7. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = e^t + 1,$$

за које важи $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ и $y''(0) = 4$.

Решење. Делујући Лапласовом трансформацијом на дату једначину, добијамо да важи

$$\begin{aligned}
&s^3Y(s) - s^2 \cdot 0 - s \cdot 2 - 4 - 3(s^2Y(s) - s \cdot 0 - 2) + 3(sY(s) - 0) - Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) = 2s - 2 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &(s-1)^3Y(s) = 2(s-1) + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s},
\end{aligned}$$

одакле је

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^3s}.$$

Из

$$\frac{1}{(s-1)^3s} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s}$$

добијамо систем

$$\left.\begin{array}{rrrrl}
A & & & +\ D & = 0\\
-2A & +\ B & & -\ 3D & = 0\\
A & -\ B & +\ C & +\ 3D & = 0\\
& & & -\ D & = 1
\end{array}\right\},$$

чије је решење $(A, B, C, D) = (1, -1, 1, -1)$. Дакле, важи

$$\frac{1}{(s-1)^3s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{s},$$

одакле је

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{s}\\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4} - \frac{1}{s}\\
&\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} e^t + te^t + \frac{t^2}{2}e^t + \frac{t^3}{6}e^t - 1 = y(t).
\end{aligned}$$

$\square$