

Факултет организационих наука

# Гранична вредност и непрекидност функције

Вукашин Брковић

Нека је  $a \in \overline{R}$  тачка нагомилавања скупа  $D$ . Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  има граничну вредност  $A \in \overline{R}$  ако за сваку околину  $V$  тачке  $A$  постоји околина  $U$  тачке  $a$ , таква да је  $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ .

Нека је  $a \in \overline{R}$  тачка нагомилавања скупа  $D$ . Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  има граничну вредност  $A \in \overline{\mathbb{R}}$  ако за сваку околину  $V$  тачке  $A$  постоји околина  $U$  тачке  $a$ , таква да је  $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ . Пишемо:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Нека је  $a \in \overline{R}$  тачка нагомилавања скупа  $D$ . Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  има граничну вредност  $A \in \overline{R}$  ако за сваку околину  $V$  тачке  $A$  постоји околина  $U$  тачке  $a$ , таква да је  $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ . Пишемо:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Једна од варијанти дефиниције где су  $a$  и  $A$  коначне вредности, околина  $V$  тзв.  $\varepsilon$  околина,  $V = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  и  $U = (a - \delta, a + \delta)$  је позната и као „**епсилон-делта**” дефиниција граничне вредности:

Нека је  $a \in \overline{R}$  тачка нагомилавања скупа  $D$ . Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  има граничну вредност  $A \in \overline{R}$  ако за сваку околину  $V$  тачке  $A$  постоји околина  $U$  тачке  $a$ , таква да је  $f(U \setminus \{a\}) \subset V$ . Пишемо:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Једна од варијанти дефиниције где су  $a$  и  $A$  коначне вредности, околина  $V$  тзв.  $\varepsilon$  околина,  $V = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  и  $U = (a - \delta, a + \delta)$  је позната и као „**епсилон-делта**” дефиниција граничне вредности:

Гранична вредност функције  $f$  у тачки  $a$  је вредност  $A$  уколико је испуњено

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$



Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad 2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

Нека су  $A$  и  $B$  редом граничне вредности функција  $f$  и  $g$ , кад  $x \rightarrow a$ . Тада важи

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{за } B \neq 0: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Неке познате граничне вредности:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad 6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Наведимо  $\varepsilon - \delta$  дефиницију непрекидности функције у тачку:  
Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  је непрекидна у тачки  $a \in D$  ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$



Наведимо  $\varepsilon - \delta$  дефиницију непрекидности функције у тачку:  
Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  је непрекидна у тачки  $a \in D$  ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Јасно је да ако је  $f$  непрекидна у тачки  $a$  тада важи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Наведимо  $\varepsilon - \delta$  дефиницију непрекидности функције у тачку:  
Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  је непрекидна у тачки  $a \in D$  ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Јасно је да ако је  $f$  непрекидна у тачки  $a$  тада важи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  је непрекидна на скупу  $A \subset D$  ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Ако су функције  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$ , тада су и  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  непрекидне у тачки  $a$ .

Ако су функције  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$ , тада су и  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  непрекидне у тачки  $a$ .

Ако су  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$  и важи  $g(a) \neq 0$ , тада је и функција  $f/g$  непрекидна у тачки  $a$ .

Ако су функције  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$ , тада су и  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  непрекидне у тачки  $a$ .

Ако су  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$  и важи  $g(a) \neq 0$ , тада је и функција  $f/g$  непрекидна у тачки  $a$ .

Ако је функција  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $a \in A$ , и ако је функција  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $b = f(a)$ , тада је и функција  $g \circ f$  непрекидна у тачки  $a$ .

Ако су функције  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$ , тада су и  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  непрекидне у тачки  $a$ .

Ако су  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$  и важи  $g(a) \neq 0$ , тада је и функција  $f/g$  непрекидна у тачки  $a$ .

Ако је функција  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $a \in A$ , и ако је функција  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $b = f(a)$ , тада је и функција  $g \circ f$  непрекидна у тачки  $a$ .

Елементарне функције су све функције које добијају коначном применом аритметичких операција и композиција над основим елементарним функцијама (константе, степене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције).

Ако су функције  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$ , тада су и  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  непрекидне у тачки  $a$ .

Ако су  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$  и важи  $g(a) \neq 0$ , тада је и функција  $f/g$  непрекидна у тачки  $a$ .

Ако је функција  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $a \in A$ , и ако је функција  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $b = f(a)$ , тада је и функција  $g \circ f$  непрекидна у тачки  $a$ .

Елементарне функције су све функције које добијају коначном применом аритметичких операција и композиција над основим елементарним функцијама (константе, степене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције).

Све елементарне функције су непрекидне у области дефинисаности!

Ако су функције  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$ , тада су и  $f \pm g$  и  $f \cdot g$  непрекидне у тачки  $a$ .

Ако су  $f$  и  $g$  непрекидне у тачки  $a$  и важи  $g(a) \neq 0$ , тада је и функција  $f/g$  непрекидна у тачки  $a$ .

Ако је функција  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $a \in A$ , и ако је функција  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна у тачки  $b = f(a)$ , тада је и функција  $g \circ f$  непрекидна у тачки  $a$ .

Елементарне функције су све функције које добијају коначном применом аритметичких операција и композиција над основим елементарним функцијама (константе, степене, експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције).

Све елементарне функције су непрекидне у области дефинисаности!

**ПРИМЕР:** <https://www.desmos.com/calculator/aq3vc1goev>