

Факултет организационих наука

Изводи функције и Лопиталово правило

Вукашин Брковић

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$.

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$.

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x .

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x .

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x . Тада важи:

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x .

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x . Тада важи:

$$\textcircled{1} \quad (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x .

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x . Тада важи:

- ❶ $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$
- ❷ $(cf(x))' = cf'(x), c \in \mathbb{R};$

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x .

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x . Тада важи:

- ❶ $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$
- ❷ $(cf(x))' = cf'(x), c \in \mathbb{R};$
- ❸ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$

Нека је функција $y = f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b) и нека је $x \in (a, b)$. Ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

тада се она назива изводом функције f у тачки x и означава $f'(x)$. Кажемо да је функција диференцијабилна у тачки x .

Нека су f и g диференцијабилне функције у тачки x . Тада важи:

- ❶ $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$
- ❷ $(cf(x))' = cf'(x), c \in \mathbb{R};$
- ❸ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$
- ❹ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0.$

Ако функција f има извод у тачки x , а функција g има извод у тачки $y = f(x)$, тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x).$$

Ако функција f има извод у тачки x , а функција g има извод у тачки $y = f(x)$, тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x).$$

Уколико је функција f диференцијабилна у свакој тачки интервала (a, b) , тада можемо говорити о новој функцији $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Та функција такође може имати извод у некој тачки x , при чему бисмо онда рекли да је то други извод почетне функције f у тачки x , односно $f''(x) = (f')'(x)$.

Ако функција f има извод у тачки x , а функција g има извод у тачки $y = f(x)$, тада функција $g \circ f$ има извод у тачки x и важи

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x).$$

Уколико је функција f диференцијабилна у свакој тачки интервала (a, b) , тада можемо говорити о новој функцији $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Та функција такође може имати извод у некој тачки x , при чему бисмо онда рекли да је то други извод почетне функције f у тачки x , односно $f''(x) = (f')'(x)$. Аналогно је за остале изводе вишег реда.

Локални екстремуми

Локални екстремуми

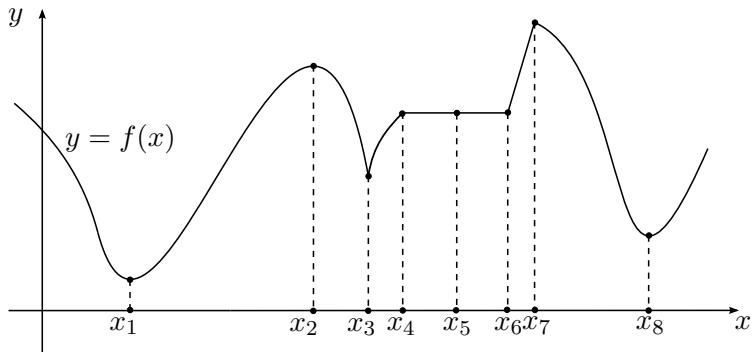
Ако постоји околина U тачке c таква да за свако $x \in U$ важи $f(x) \leq f(c)$ (односно $f(x) < f(c)$), тада функција f има локални максимум (односно строги локални максимум) у тачки c .

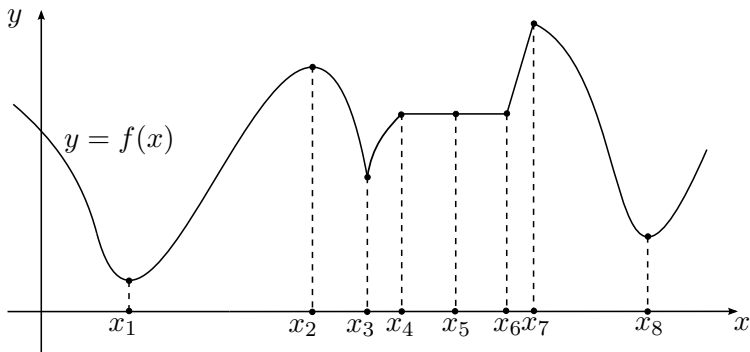
Локални екстремуми

Ако постоји околина U тачке c таква да за свако $x \in U$ важи $f(x) \leq f(c)$ (односно $f(x) < f(c)$), тада функција f има локални максимум (односно строги локални максимум) у тачки c .

Слично се дефинише и локални минимум $((\forall x \in U) f(c) \leq f(x))$, односно строги локални минимум $(f(c) < f(x))$.

Локални екстремуми





Видимо да у датом примеру функција има строги локални минимум у тачкама x_1 , x_3 и x_8 , а строги локални максимум у тачкама x_2 и x_7 . Локални минимум је такође и у тачкама x_6 и x_5 , док је локални максимум у x_4 и у x_5 .

Монотоност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

Монотоност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

- ❶ **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

Монотоност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

- ❶ **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$
- ❷ **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

Мононост функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

- ❶ **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$
- ❷ **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
- ❸ **оппадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

Монотоност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

- ❶ **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$
- ❷ **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
- ❸ **опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
- ❹ **строго опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Мононост функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је на интервалу $(a, b) \subset A$:

- ❶ **растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$
- ❷ **строго растућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
- ❸ **опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
- ❹ **строго опадајућа** ако за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ако функција има било коју од наведених особина, за њу кажемо да је **моносна**.

Нека је функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

Нека је функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

❶ $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b) ,

Нека је функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b) ,
- ❷ $f'(x) > 0$, тада је функција f строго растућа на (a, b) ,

Нека је функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b) ,
- ❷ $f'(x) > 0$, тада је функција f строго растућа на (a, b) ,
- ❸ $f'(x) \leq 0$, тада је функција f опадајућа на (a, b) ,

Нека је функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна на интервалу $(a, b) \subset A$. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f'(x) \geq 0$, тада је функција f растућа на (a, b) ,
- ❷ $f'(x) > 0$, тада је функција f строго растућа на (a, b) ,
- ❸ $f'(x) \leq 0$, тада је функција f опадајућа на (a, b) ,
- ❹ $f'(x) < 0$, тада је функција f строго опадајућа на (a, b) .

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

- 1 Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c .

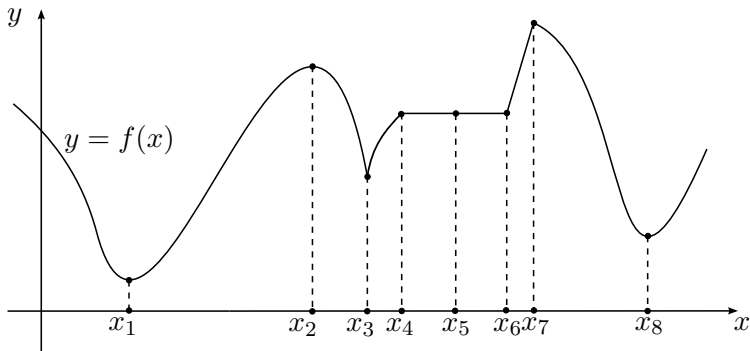
Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

- 1 Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c .
- 2 Ако за $x \in U$ важи $f'(x) > 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) < 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални максимум у тачки c .

Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $\overset{\circ}{U}(c)$. Тада имамо:

- 1 Ако за $x \in U$ важи $f'(x) < 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) > 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални минимум у тачки c .
- 2 Ако за $x \in U$ важи $f'(x) > 0$ кад је $x < c$ и $f'(x) < 0$ кад је $x > c$, тада функција f има строги локални максимум у тачки c .

Кандидате за локалне екстремуме ћемо тражити међу тачкама у којима је $f'(x) = 0$ и онима у којима први извод није дефинисан.



На којим интервалима је функција растућа/строго растућа/оппадајућа/строго опадајућа?

Шта се може рећи о првом изводу функције у тачкама у којима функција има локални екстремум?

Конвексност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (1)$$

Конвексност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (1)$$

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конкавна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (2)$$

Конвексност функције

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конвексна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

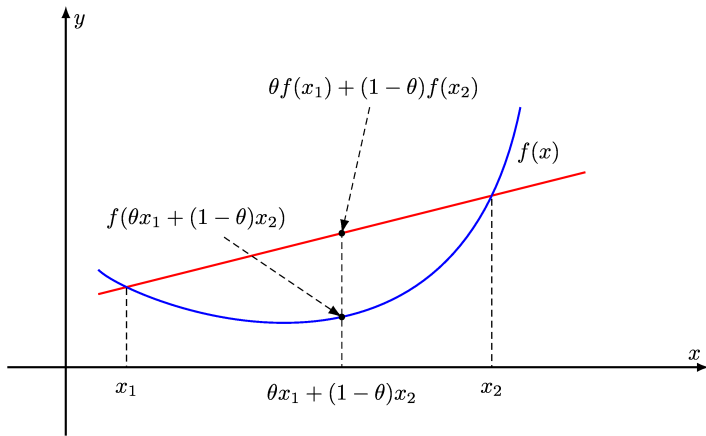
$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (1)$$

Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ је **конкавна** на $(x_1, x_2) \subset A$ ако за свако $\theta \in (0, 1)$ важи

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2). \quad (2)$$

Ако у (1), односно (2) стоје стоги знаци неједнакости, онда је функција f строго конвексна, односно строго конкавна.

Строго конвексна функција



Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

❶ $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b) ,

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b) ,
- ❷ $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b) ,

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b) ,
- ❷ $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b) ,
- ❸ $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b) ,

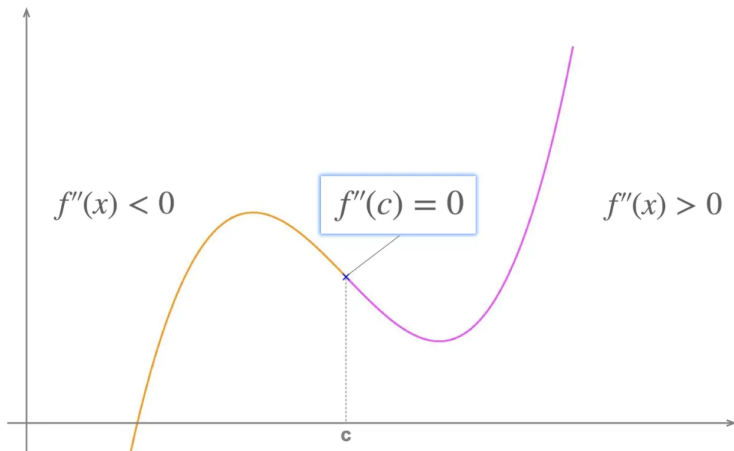
Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b) ,
- ❷ $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b) ,
- ❸ $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b) ,
- ❹ $f''(x) < 0$, тада је функција f строго конкавна на (a, b) .

Нека је функција f два пута диференцијабилна на интервалу (a, b) . Ако за свако $x \in (a, b)$ важи

- ❶ $f''(x) \geq 0$, тада је функција f конвексна на (a, b) ,
- ❷ $f''(x) > 0$, тада је функција f строго конвексна на (a, b) ,
- ❸ $f''(x) \leq 0$, тада је функција f конкавна на (a, b) ,
- ❹ $f''(x) < 0$, тада је функција f строго конкавна на (a, b) .

Нека је функција f дефинисана у околини тачке c . Тачка $P(c, f(c))$ је **превојна тачка** криве $y = f(x)$ ако постоји околина тачке c у којој је функција строго конвексна за $x < c$ а строго конкавна за $x > c$ или обрнуто.



Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,

② $g'(x) \neq 0$, за $x \in \overset{\circ}{U}(a)$,

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

- ❶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,
- ❷ $g'(x) \neq 0$, за $x \in \overset{\circ}{U}(a)$,
- ❸ постоји $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема: Нека су f и g диференцијабилне функције у пробушеној околини $\overset{\circ}{U}(a)$ тачке a и нека је:

❶ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,

❷ $g'(x) \neq 0$, за $x \in \overset{\circ}{U}(a)$,

❸ постоји $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$