

Факултет организационих наука

# Матрице и детерминанте

Вукашин Брковић

Матрица димензија  $m \times n$  је правоугаона схема од  $m \cdot n$  елемената облика

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица димензија  $m \times n$  је правоугаона схема од  $m \cdot n$  елемената облика

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Скуп свих таквих матрица чији су елементи реални бројеви се означава  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  или само  $M_{m \times n}$ .

Матрица димензија  $m \times n$  је правоугаона схема од  $m \cdot n$  елемената облика

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Скуп свих таквих матрица чији су елементи реални бројеви се означава  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  или само  $M_{m \times n}$ .

**Пример:** Ако је  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ , тада је  $a_{22} = 5$  и  $a_{13} = 3$ .

## Значајне матрице:

## Значајне матрице:

- 1 Квадратна матрица:

## Значајне матрице:

- 1 Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

## Значајне матрице:

- 1 Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;
- 2 Дијагонална матрица:



## Значајне матрице:

❶ Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

❷ Дијагонална матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

## Значајне матрице:

❶ Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

❷ Дијагонална матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

❸ Јединична матрица реда  $n$ :

## Значајне матрице:

❶ Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

❷ Дијагонална матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

❸ Јединична матрица реда  $n$ : нпр.  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

## Значајне матрице:

❶ Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

❷ Дијагонална матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

❸ Јединична матрица реда  $n$ : нпр.  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

❹ Нула матрица  $m \times n$ :

## Значајне матрице:

❶ Квадратна матрица:  $m = n$ , нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ;

❷ Дијагонална матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

❸ Јединична матрица реда  $n$ : нпр.  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

❹ Нула матрица  $m \times n$ :  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$ ;

## 5 Троугаона матрица:

5 Троугаона матрица:

1 горње троугаона матрица:

## 5 Троугаона матрица:

- 1 горње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;



## 5 Троугаона матрица:

1 горње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

2 доње троугаона матрица:

## 5 Троугаона матрица:

1 горње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

2 доње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ .

## 5 Троугаона матрица:

1 горње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

2 доње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ .

ПОДСЕЋАЊЕ: Алгебарска структура је била уређени пар који чине неки скуп и операција.

5 Троугаона матрица:

1 горње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  ;

2 доње троугаона матрица: нпр.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$  .

ПОДСЕЋАЊЕ: Алгебарска структура је била уређени пар који чине неки скуп и операција.

Већ смо увели скуп матрица  $M_{m \times n}$ ; које су све бинарне операције у оптицају? Које друге операције са матрицама постоје?

Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

- **Сабирање матрица:**  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

- **Сабирање матрица:**  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Слагање димензија: Мора важити  $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ !

Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

- **Сабирање матрица:**  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Слагање димензија: Мора важити  $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ !

- **Множење матрица:**  $C = A \cdot B \in M_{m_1 \times n_2}$ ,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} \cdot b_{kj}$$



Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

- **Сабирање матрица:**  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Слагање димензија: Мора важити  $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ !

- **Множење матрица:**  $C = A \cdot B \in M_{m_1 \times n_2}$ ,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Слагање димензија: Мора важити  $n_1 = m_2$ !

Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

- **Сабирање матрица:**  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Слагање димензија: Мора важити  $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ !

- **Множење матрица:**  $C = A \cdot B \in M_{m_1 \times n_2}$ ,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Слагање димензија: Мора важити  $n_1 = m_2$ !

- **Множење матрице скаларом (бројем):**  $C = \lambda \cdot A$ ,  
 $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ .

Нека су дате матрице  $A = [a_{ij}]_{m_1 \times n_1}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m_2 \times n_2}$ :

- **Сабирање матрица:**  $C = A + B$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Слагање димензија: Мора важити  $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ !

- **Множење матрица:**  $C = A \cdot B \in M_{m_1 \times n_2}$ ,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Слагање димензија: Мора важити  $n_1 = m_2$ !

- **Множење матрице скаларом (бројем):**  $C = \lambda \cdot A$ ,  
 $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ .
- **Транспоноване матрице:**  $C = A^T \in M_{n_1 \times m_1}$ ,  $c_{ij} = a_{ji}$ .



- $A + B = B + A$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$



- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $(A + B)^T = A^T + B^T$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $(A + B)^T = A^T + B^T$   
 $(A^T)^T = A$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $(A + B)^T = A^T + B^T$   
 $(A^T)^T = A$   
 $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $(A + B)^T = A^T + B^T$   
 $(A^T)^T = A$   
 $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  Обратити пажњу на редослед!

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $(A + B)^T = A^T + B^T$   
 $(A^T)^T = A$   
 $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  Обратите пажњу на редослед!
- $A + O = O + A = A,$

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Претходни пример нам говори да множење у општем случају није комутативно!!!

- $(A + B)^T = A^T + B^T$   
 $(A^T)^T = A$   
 $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  Обратите пажњу на редослед!
- $A + O = O + A = A, \quad A \cdot I = I \cdot A = A.$



**Пример:** Уочимо следећу еквиваленцију између система линеарних једначина и такозване матричне једначине:

**Пример:** Уочимо следећу еквиваленцију између система линеарних једначина и такозване матричне једначине:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Пример:** Уочимо следећу еквиваленцију између система линеарних једначина и такозване матричне једначине:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_B.$$

**Пример:** Уочимо следећу еквиваленцију између система линеарних једначина и такозване матричне једначине:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_B.$$

Уколико одредимо  $X$ , директно одређујемо и решење система  $(x, y)$ , и обрнуто.

**Пример:** Уочимо следећу еквиваленцију између система линеарних једначина и такозване матричне једначине:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_B.$$

Уколико одредимо  $X$ , директно одређујемо и решење система  $(x, y)$ , и обрнуто.

*Дигресија:* Матрична једначина  $AX = B$  нас подсећа на стандардну једначину  $ax = b$  у скупу реалних бројева, чије је решење  $x = \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b$ , када  $a \neq 0$ .

**Пример:** Уочимо следећу еквиваленцију између система линеарних једначина и такозване матричне једначине:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_B.$$

Уколико одредимо  $X$ , директно одређујемо и решење система  $(x, y)$ , и обрнуто.

*Дигресија:* Матрична једначина  $AX = B$  нас подсећа на стандардну једначину  $ax = b$  у скупу реалних бројева, чије је решење  $x = \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b$ , када  $a \neq 0$ .

По аналогiji, можемо се понадати да је решење матричне једначине дато са  $X = A^{-1} \cdot B$ , уз одређена ограничења за  $A$  (попут  $a \neq 0$ ), штагод  $A^{-1}$  било у свету матрица.

Нека је дата **квадратна** матрица  $A$ .

Нека је дата **квадратна** матрица  $A$ . Њој ћемо (на неки начин - видите предавања) придружити један реалан **број** који ћемо називати **детерминантом** матрице  $A$  и означавати  $\det A$  или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$



Нека је дата **квадратна** матрица  $A$ . Њој ћемо (на неки начин - видите предавања) придружити један реалан **број** који ћемо називати **детерминантом** матрице  $A$  и означавати  $\det A$  или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Карактеристични случајеви:**

Нека је дата **квадратна** матрица  $A$ . Њој ћемо (на неки начин - видите предавања) придружити један реалан **број** који ћемо називати **детерминантом** матрице  $A$  и означавати  $\det A$  или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Карактеристични случајеви:**

- $n = 1$ :  $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$ .

Нека је дата **квадратна** матрица  $A$ . Њој ћемо (на неки начин - видите предавања) придружити један реалан **број** који ћемо називати **детерминантом** матрице  $A$  и означавати  $\det A$  или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Карактеристични случајеви:**

- $n = 1$ :  $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$ .
- $n = 2$ :  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .

Нека је дата **квадратна** матрица  $A$ . Њој ћемо (на неки начин - видите предавања) придружити један реалан **број** који ћемо називати **детерминантом** матрице  $A$  и означавати  $\det A$  или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Карактеристични случајеви:**

- $n = 1$ :  $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$ .
- $n = 2$ :  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .
- $n = 3$ : **Сарусово правило.**

Уколико за квадратну матрицу важи  $\det A \neq 0$ , кажемо да је матрица  $A$  **регуларна**.

Уколико за квадратну матрицу важи  $\det A \neq 0$ , кажемо да је матрица  $A$  **регуларна**. Иначе је **сингуларна**.

Уколико за квадратну матрицу важи  $\det A \neq 0$ , кажемо да је матрица  $A$  **регуларна**. Иначе је **сингуларна**.

Уколико је  $A$  регуларна матрица, тада постоји јединствена матрица  $A^{-1}$  таква да је

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Уколико за квадратну матрицу важи  $\det A \neq 0$ , кажемо да је матрица  $A$  **регуларна**. Иначе је **сингуларна**.

Уколико је  $A$  регуларна матрица, тада постоји јединствена матрица  $A^{-1}$  таква да је

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Матрицу  $A^{-1}$  називамо инверзном матрицом матрице  $A$ .



Уколико за квадратну матрицу важи  $\det A \neq 0$ , кажемо да је матрица  $A$  **регуларна**. Иначе је **сингуларна**.

Уколико је  $A$  регуларна матрица, тада постоји јединствена матрица  $A^{-1}$  таква да је

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Матрицу  $A^{-1}$  називамо инверзном матрицом матрице  $A$ . Нека је у матричној једначини  $AX = B$ , матрица  $A$  регуларна. Тада је:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I \cdot X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Решење је заиста  $X = A^{-1}B$ , а услов који  $A$  мора испунити је  $\det A \neq 0$ . Случај  $\det A = 0$  ће бити касније разматран.

Уколико за квадратну матрицу важи  $\det A \neq 0$ , кажемо да је матрица  $A$  **регуларна**. Иначе је **сингуларна**.

Уколико је  $A$  регуларна матрица, тада постоји јединствена матрица  $A^{-1}$  таква да је

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Матрицу  $A^{-1}$  називамо инверзном матрицом матрице  $A$ . Нека је у матричној једначини  $AX = B$ , матрица  $A$  регуларна. Тада је:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I \cdot X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Решење је заиста  $X = A^{-1}B$ , а услов који  $A$  мора испунити је  $\det A \neq 0$ . Случај  $\det A = 0$  ће бити касније разматран.

- **Минор**  $M_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  је детерминанта матрице која се добија изостављањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне из матрице  $A$ ;

- **Минор**  $M_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  је детерминанта матрице која се добија изостављањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне из матрице  $A$ ;
- **Кофактор**  $A_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  се дефинише као  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ;

- **Минор**  $M_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  је детерминанта матрице која се добија изостављањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне из матрице  $A$ ;
- **Кофактор**  $A_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  се дефинише као  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ;
- **Матрица кофактора** која одговара матрици  $A = [a_{ij}]_n$  је матрица  $\text{cof } A = [A_{ij}]_n$ .

- **Минор**  $M_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  је детерминанта матрице која се добија изостављањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне из матрице  $A$ ;
- **Кофактор**  $A_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  се дефинише као  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ;
- **Матрица кофактора** која одговара матрици  $A = [a_{ij}]_n$  је матрица  $\text{cof } A = [A_{ij}]_n$ .
- **Адјунгована матрица** је матрица  $\text{adj } A = (\text{cof } A)^T$

- **Минор**  $M_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  је детерминанта матрице која се добија изостављањем  $i$ -те врсте и  $j$ -те колоне из матрице  $A$ ;
- **Кофактор**  $A_{ij}$  који одговара елементу  $a_{ij}$  матрице  $A$  се дефинише као  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ;
- **Матрица кофактора** која одговара матрици  $A = [a_{ij}]_n$  је матрица  $\text{cof } A = [A_{ij}]_n$ .
- **Адјунгована матрица** је матрица  $\text{adj } A = (\text{cof } A)^T$

Инверзна матрица регуларне матрице се рачуна по формули:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A.$$

Још неке особине матрица:



Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$

Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  (Редослед!)

Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  (Редослед!)
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  (Редослед!)
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det A^T = \det A$

Још неке особине матрица:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  (Редослед!)
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det A^T = \det A$
- У општем случају не важи  $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ .





За матрице реда већег од 3 не постоји једноставна схема попут Сарусовог правила за рачунање детерминанте.

За матрице реда већег од 3 не постоји једноставна схема попут Сарусовог правила за рачунање детерминанте.

### Лапласов развој

За матрице реда већег од 3 не постоји једноставна схема попут Сарусовог правила за рачунање детерминанте.

### Лапласов развој

Нека је дата матрица  $A$  реда  $n$ . Одаберимо произвољну врсту или колону:

За матрице реда већег од 3 не постоји једноставна схема попут Сарусовог правила за рачунање детерминанте.

## Лапласов развој

Нека је дата матрица  $A$  реда  $n$ . Одаберимо произвољну врсту или колону:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

За матрице реда већег од 3 не постоји једноставна схема попут Сарусовог правила за рачунање детерминанте.

### Лапласов развој

Нека је дата матрица  $A$  реда  $n$ . Одаберимо произвољну врсту или колону:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Тада за детерминанту важи:

$$\det A = a_{1i} \cdot A_{1i} + a_{2i} \cdot A_{2i} + \cdots + a_{ni} \cdot A_{ni},$$

где је  $A_{ki}$  кофактор који одговара елементу  $a_{ki}$ .



- 1 Ако су сви елементи једне врсте/колоне једнаки нула, онда је детерминанте једнака нули.

- 1 Ако су сви елементи једне врсте/колоне једнаки нула, онда је детерминанте једнака нули.
- 2 Ако су две врсте или две колоне пропорционалне, детерминанте је једнака нули.



- 1 Ако су сви елементи једне врсте/колоне једнаки нула, онда је детерминанте једнака нули.
- 2 Ако су две врсте или две колоне пропорционалне, детерминанте је једнака нули.
- 3 Заменом места двеју врста или двеју колона, детерминанта мења само знак.

- ❶ Ако су сви елементи једне врсте/колоне једнаки нула, онда је детерминанте једнака нули.
- ❷ Ако су две врсте или две колоне пропорционалне, детерминанте је једнака нули.
- ❸ Заменом места двеју врста или двеју колона, детерминанта мења само знак.
- ❹ Додавањем једна врсте помножене реалним бројем другој врсти, детерминанта се не мења. Аналогно важи и за колоне.

$$\textcircled{5} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Аналогно важи и за колоне.

$$\textcircled{5} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Аналогно важи и за колоне.

- $\textcircled{6}$  Ако је  $A$  троугаона матрица, тада је детерминанта једнака производу елемената на главној дијагонали.