

Факултет организационих наука

Векторски простори

Вукашин Брковић

Нека је K неко поље, $(V, +)$ једна Абелова група, и нека је $\cdot : K \times V \rightarrow V$ пресликавање такво да важи

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v,$$

$$1 \cdot v = v.$$

Нека је K неко поље, $(V, +)$ једна Абелова група, и нека је $\cdot : K \times V \rightarrow V$ пресликавање такво да важи

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v,$$

$$1 \cdot v = v.$$

Уређена четворка $(V, K, +, \cdot)$, се назива **векторски простор** .
Елементе скупа V називамо *векторима*, а елементе скупа K *скаларима*.

Скупови V и K могу бити разни: вектори могу бити бројеви, матрице, полиноми итд. а најчешће је случај да су скалари из поља $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Скупови V и K могу бити разни: вектори могу бити бројеви, матрице, полиноми итд. а најчешће је случај да су скалари из поља $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Нас ће највише интересовати случај када је $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $K = \mathbb{R}$, при чему су операције $+$ и $\cdot$ дефинисане на следећи начин:

Скупови V и K могу бити разни: вектори могу бити бројеви, матрице, полиноми итд. а најчешће је случај да су скалари из поља $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Нас ће највише интересовати случај када је $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $K = \mathbb{R}$, при чему су операције $+$ и $\cdot$ дефинисане на следећи начин:

Ако је $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тада је

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

Нека су дати вектори $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Скуп

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}$$

називамо **линеарним омотачем** вектора $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Нека су дати вектори $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Скуп

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}$$

називамо **линеарним омотачем** вектора $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Елементи тог скупа се називају *линеарним комбинацијама* вектора $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Нека су дати вектори $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Скуп

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}$$

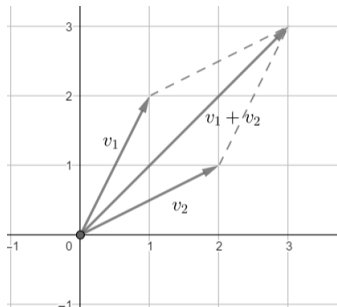
називамо **линеарним омотачем** вектора $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Елементи тог скупа се називају *линеарним комбинацијама* вектора $v_1, v_2, \dots, v_n$.

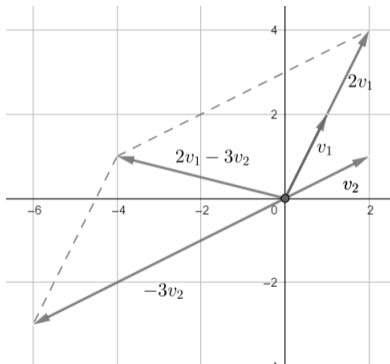
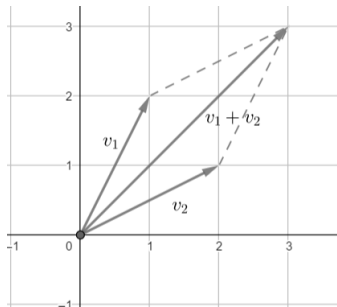
Пример: Посматрајмо векторски простор $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и два вектора, $v_1 = (1, 2)$ и $v_2 = (2, 1)$. Пример две линеарне комбинације ова два вектора:

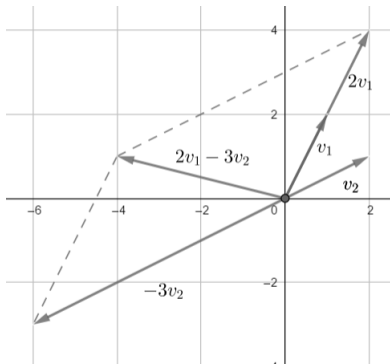
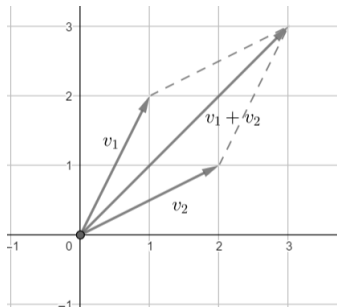
$$v_1 + v_2 = (1, 2) + (2, 1) = (3, 3)$$

$$2v_1 + (-3)v_2 = (2, 4) + (-6, -3) = (-4, 1)$$



Линеарни омотач

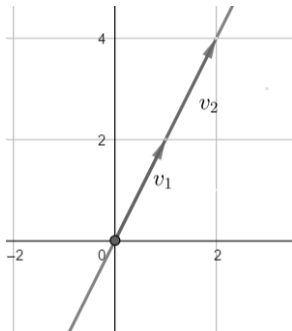




Важи $\mathcal{L}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$, односно скуп $\{v_1, v_2\}$ генерише цео простор $\mathbb{R}^2$, па је то један *генераторни скуп* простора $\mathbb{R}^2$.

Пример: Посматрајмо и даље векторски простор $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и уочимо векторе $v_1 = (1, 2)$ и $v_2 = (2, 4)$.

Пример: Посматрајмо и даље векторски простор $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и уочимо векторе $v_1 = (1, 2)$ и $v_2 = (2, 4)$.



Вектори $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ су **линеарно независни** ако важи

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

У супротном, ти вектори су *линеарно зависни*.

Вектори $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ су **линеарно независни** ако важи

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

У супротном, ти вектори су *линеарно зависни*.

Максималан број линеарно независних вектора у векторском простору V представља **димензију** тог векторског простора, у ознаци $\dim V$.

Вектори $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ су **линеарно независни** ако важи

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

У супротном, ти вектори су *линеарно зависни*.

Максималан број линеарно независних вектора у векторском простору V представља **димензију** тог векторског простора, у ознаци $\dim V$.

Ако је $n = \dim V$ и $v_1, v_2, \dots, v_n$ је n линеарно независних вектора у простору V , тада кажемо да је $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ једна **база** простора V .

Вектори $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ су **линеарно независни** ако важи

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

У супротном, ти вектори су *линеарно зависни*.

Максималан број линеарно независних вектора у векторском простору V представља **димензију** тог векторског простора, у ознаци $\dim V$.

Ако је $n = \dim V$ и $v_1, v_2, \dots, v_n$ је n линеарно независних вектора у простору V , тада кажемо да је $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ једна **база** простора V .

Ранг матрице је једнак максималном броју њених линеарно независних колона (или броју њених линеарно независних врста).

Наредна тврђења су еквивалентна:

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је база векторског простора V .
- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је минимални генераторни скуп V .
- За свако $v \in V$ постоје јединствени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ такви да је $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

Наредна тврђења су еквивалентна:

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је база векторског простора V .
- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је минимални генераторни скуп V .
- За свако $v \in V$ постоје јединствени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ такви да је $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

За вредности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из последње ставке претходног тврђења кажемо да представљају *координате* вектора v у бази $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Наредна тврђења су еквивалентна:

- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је база векторског простора V .
- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ је минимални генераторни скуп V .
- За свако $v \in V$ постоје јединствени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ такви да је $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

За вредности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из последње ставке претходног тврђења кажемо да представљају *координате* вектора v у бази $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

За различите базе, исти вектор ће имати различите координате.

Пример: Лако се може проверити да је $\{(1, 2), (2, 1)\}$ једна база простора $\mathbb{R}^2$.

Пример: Лако се може проверити да је $\{(1, 2), (2, 1)\}$ једна база простора $\mathbb{R}^2$.

У примеру од раније смо имали да је

$$(-4, 1) = 2(1, 2) - 3(2, 1),$$

односно координате вектора $(-4, 1)$ у тој бази су 2 и -3 .

Пример: Лако се може проверити да је $\{(1, 2), (2, 1)\}$ једна база простора $\mathbb{R}^2$.

У примеру од раније смо имали да је

$$(-4, 1) = 2(1, 2) - 3(2, 1),$$

односно координате вектора $(-4, 1)$ у тој бази су 2 и -3 .

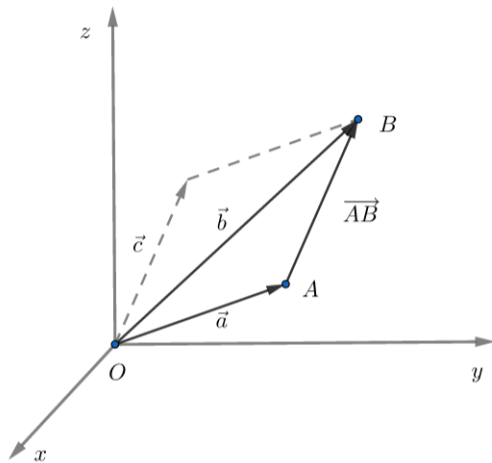
Са друге стране, важи

$$(-4, 1) = -4(1, 0) + 1(0, 1)$$

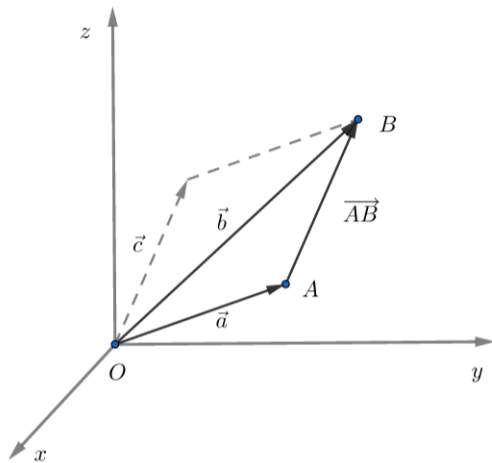
па се ту види да кад год смо раније говорили о координатама, ми смо несвесно мислили на једну конкретну базу (ортонормирана база $\{e_1, e_2\}$, за $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$).

Средња школа: Простор $\mathbb{R}^3$ је описан преко Декартовог координатног система у коме елементе $\mathbb{R}^3$ представљамо као *тачке*.

Средња школа: Простор $\mathbb{R}^3$ је описан преко Декартовог координатног система у коме елементе $\mathbb{R}^3$ представљамо као тачке.



Средња школа: Простор $\mathbb{R}^3$ је описан преко Декартовог координатног система у коме елементе $\mathbb{R}^3$ представљамо као тачке.



Користимо ознаку $\vec{a}$ уместо досадашње a .

Користимо ознаку $\vec{a}$ уместо досадашње a .

За два вектора ћемо рећи да су једнаки ако се један од њих може добити неком транслацијом другог у простору.

Користимо ознаку $\vec{a}$ уместо досадашње a .

За два вектора ћемо рећи да су једнаки ако се један од њих може добити неком транслацијом другог у простору.

Уместо, нпр. $\vec{b} = (1, 2, 3)$, пише се и $\vec{b} = 1i + 2j + 3k$.

Користимо ознаку $\vec{a}$ уместо досадашње a .

За два вектора ћемо рећи да су једнаки ако се један од њих може добити неком трансформацијом другог у простору.

Уместо, нпр. $\vec{b} = (1, 2, 3)$, пише се и $\vec{b} = 1i + 2j + 3k$.

Еуклидско растојање између тачака крајева вектора представља **интензитет** тог вектора.

Користимо ознаку $\vec{a}$ уместо досадашње a .

За два вектора ћемо рећи да су једнаки ако се један од њих може добити неком трансформацијом другог у простору.

Уместо, нпр. $\vec{b} = (1, 2, 3)$, пише се и $\vec{b} = 1i + 2j + 3k$.

Еуклидско растојање између тачака крајева вектора представља **интензитет** тог вектора.

Пример: Ако су дате тачке $A(1, 1, 1)$ и $B(1, 2, 3)$, тада је

$$|\vec{AB}| = |(0, 1, 2)| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *скалар* (број) одређен са

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *скалар* (број) одређен са

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Уколико знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се скаларни производ рачуна као $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *скалар* (број) одређен са

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Уколико знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се скаларни производ рачуна као $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Угао између два вектора:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \text{за } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *скалар* (број) одређен са

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Уколико знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се скаларни производ рачуна као $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Угао између два вектора:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \text{за } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Специјални случајеви:

① $\vec{a} = \vec{b}$: Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$,

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *скалар* (број) одређен са

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Уколико знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се скаларни производ рачуна као $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Угао између два вектора:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \text{за} \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Специјални случајеви:

- ① $\vec{a} = \vec{b}$: Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$,
- ② $\vec{a} \perp \vec{b}$: Тада је $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *вектор* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
такав да важи

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је *вектор* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

такав да важи

$$\textcircled{1} \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}),$$

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

такав да важи

- 1 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}),$
- 2 $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b},$

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

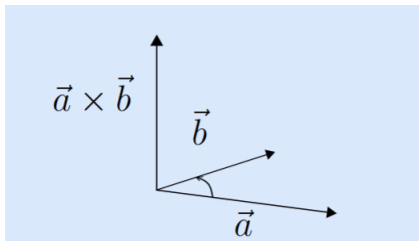
такав да важи

- 1 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}),$
- 2 $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b},$
- 3 Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ чине триједар десне оријентације.

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

такав да важи

- 1 $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
- 2 $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$,
- 3 Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине триједар десне оријентације.



Ако знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се векторски производ рачуна као

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ако знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се векторски производ рачуна као

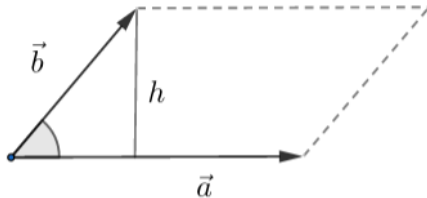
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два вектора.

Ако знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се векторски производ рачуна као

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

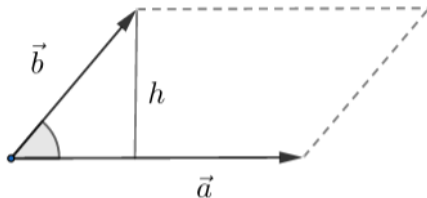
Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два вектора.



Ако знамо координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада се векторски производ рачуна као

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два вектора.



Они одређују један паралелограм чија је површина:

$$P = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се дефинише као

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

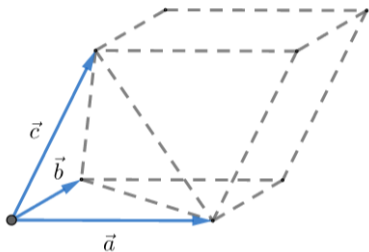
Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се дефинише као

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

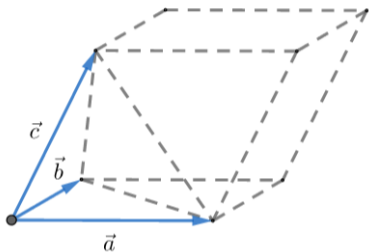
Уколико су нам познате координате вектора, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, тада се мешовити производ рачуна као

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Нека су дата три вектора, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Они разпињу један паралелопипед, као на слици:



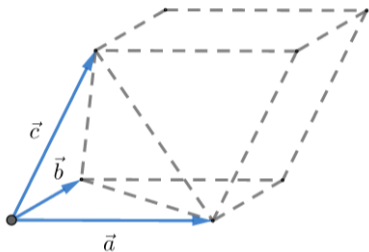
Нека су дата три вектора, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Они разпињу један паралелопипед, као на слици:



За запремину тог паралелопипеда важи

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

Нека су дата три вектора, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Они разпињу један паралелопипед, као на слици:



За запремину тог паралелопипеда важи

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

Ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни, тада је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.