

Факултет организационих наука

Аналитичка геометрија

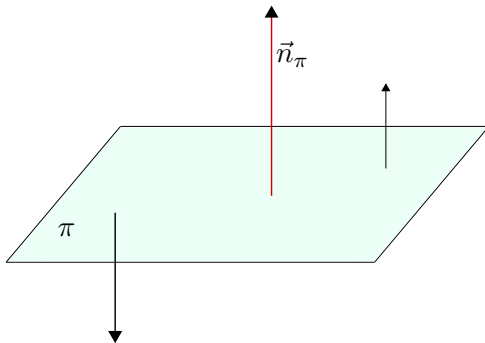
Вукашин Брковић

- Раван у простору означавамо малим грчким словима.

- Раван у простору означавамо малим грчким словима.
- За сваку раван постоји правац ортогоналан на ту раван.

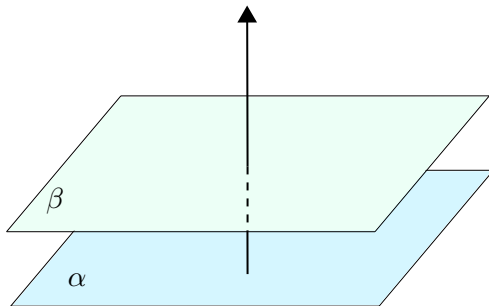
- Раван у простору означавамо малим грчким словима.
- За сваку раван постоји правац ортогоналан на ту раван.
- Било који вектор који има тај правац се назива *вектором нормале* дате равни.

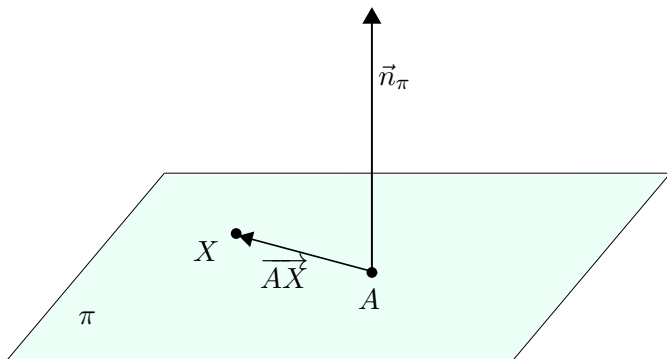
- Раван у простору означавамо малим грчким словима.
- За сваку раван постоји правац ортогоналан на ту раван.
- Било који вектор који има тај правац се назива *вектором нормале* дате равни.



Уколико имамо неки вектор у простору, он може бити вектор нормале за бесконачно много паралелних равни.

Уколико имамо неки вектор у простору, он може бити вектор нормале за бесконачно много паралелних равни.





Нека за вектор нормале равни π са претходне слике важи $n_\pi = (a, b, c)$ и нека је тачка A дата са $A(x_A, y_A, z_A)$.

Нека за вектор нормале равни π са претходне слике важи $n_\pi = (a, b, c)$ и нека је тачка A дата са $A(x_A, y_A, z_A)$. Тада за сваку тачку $X(x, y, z) \in \pi$ важи $\vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{AX}$, односно $\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AX} = 0$, одакле је

Нека за вектор нормале равни π са претходне слике важи $\vec{n}_\pi = (a, b, c)$ и нека је тачка A дата са $A(x_A, y_A, z_A)$. Тада за сваку тачку $X(x, y, z) \in \pi$ важи $\vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{AX}$, односно $\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AX} = 0$, одакле је

$$\begin{aligned}(a, b, c) \cdot (x - x_A, y - y_A, z - z_A) &= 0 \\ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= 0 \\ ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_{=d} &= 0.\end{aligned}$$

Нека за вектор нормале равни π са претходне слике важи $\vec{n}_\pi = (a, b, c)$ и нека је тачка A дата са $A(x_A, y_A, z_A)$. Тада за сваку тачку $X(x, y, z) \in \pi$ важи $\vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{AX}$, односно $\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AX} = 0$, одакле је

$$\begin{aligned}(a, b, c) \cdot (x - x_A, y - y_A, z - z_A) &= 0 \\ a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) &= 0 \\ ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_{=d} &= 0.\end{aligned}$$

Раван је π је одређена *једначином* $ax + by + cz + d = 0$, односно она представља скуп свих тачака (x, y, z) које задовољавају ту једначину.

Нека су дате равни $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и $\beta(B, \vec{n}_\beta)$. Тада постоје две могућности:

Нека су дате равни $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и $\beta(B, \vec{n}_\beta)$. Тада постоје две могућности:

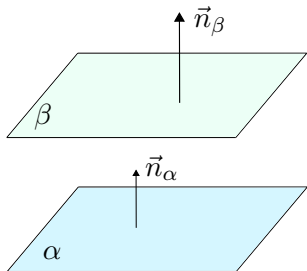
❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta:$

Нека су дате равни $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и $\beta(B, \vec{n}_\beta)$. Тада постоје две могућности:

- ❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta$: Тада су α и β паралелне ($\alpha \parallel \beta$), а у специјалном случају $A \in \beta$, равни се поклапају.

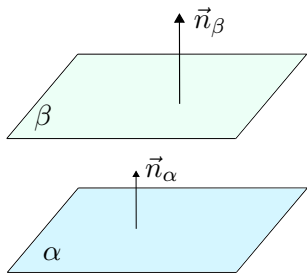
Нека су дате равни $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и $\beta(B, \vec{n}_\beta)$. Тада постоје две могућности:

- 1 $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta$: Тада су α и β паралелне ($\alpha \parallel \beta$), а у специјалном случају $A \in \beta$, равни се поклапају.



Нека су дате равни $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и $\beta(B, \vec{n}_\beta)$. Тада постоје две могућности:

- ❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta$: Тада су α и β паралелне ($\alpha \parallel \beta$), а у специјалном случају $A \in \beta$, равни се поклапају.



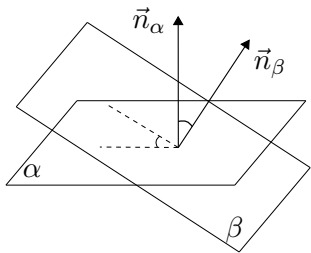
Растојање између две паралелне равни је једнако растојању између произвољне тачке једне равни и њене пројекције на другу раван. Растојање између тачке $A(x_A, y_A, z_A)$ и равни $\beta : ax + by + cz + d = 0$ је

$$d(A, \beta) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

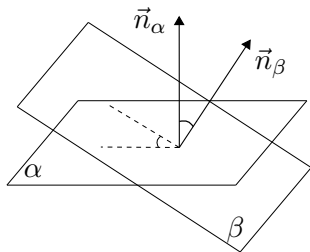
② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta:$

- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$: Равни α и β се секу.

- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$: Равни α и β се секу.

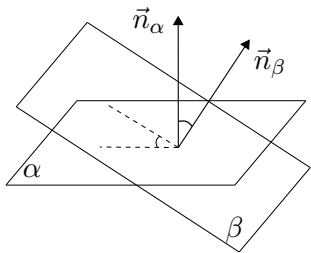


- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$: Равни α и β се секу.



Ако се две равни α и β секу, онда можемо говорити о углу између њих.

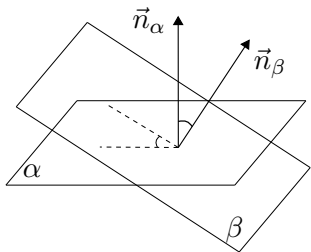
- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$: Равни α и β се секу.



Ако се две равни α и β секу, онда можемо говорити о углу између њих. Мањи угао који те равни заклапају је одређен са

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$: Равни α и β се секу.



Ако се две равни α и β секу, онда можемо говорити о углу између њих. Мањи угао који те равни заклапају је одређен са

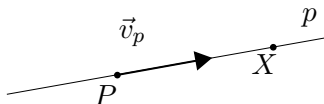
$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

(једнакост углова са нормалним кracима).

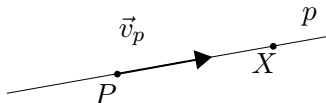
- Праве ћемо стандардно означавати малим латиничним словима.

- Праве ћемо стандардно означавати малим латиничним словима.
- Права у простору је јединствено одређена једном тачком и *вектором правца*.

- Праве ћемо стандардно означавати малим латиничним словима.
- Права у простору је јединствено одређена једном тачком и *вектором правца*.

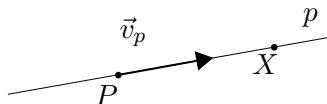


- Праве ћемо стандардно означавати малим латиничним словима.
- Права у простору је јединствено одређена једном тачком и вектором правца.



Нека је права p одређена тачком $P(x_P, y_P, z_P)$ и вектором $\vec{v}_p = (a, b, c)$.

- Праве ћемо стандардно означавати малим латиничним словима.
- Права у простору је јединствено одређена једном тачком и вектором правца.



Нека је права p одређена тачком $P(x_P, y_P, z_P)$ и вектором $\vec{v}_p = (a, b, c)$. За произвољну тачку $X(x, y, z) \in p$ постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да је $\overrightarrow{PX} = t \cdot \vec{v}_p$, односно

$$(x - x_P, y - y_P, z - z_P) = (ta, tb, tc).$$

Другачије записано, имамо да је са

$$\left. \begin{aligned} x &= x_P + ta \\ y &= y_P + tb \\ z &= z_P + tc \end{aligned} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

одређен скуп свих тачака $X(x, y, z)$ које припадају правој p .

Другачије записано, имамо да је са

$$\left. \begin{aligned} x &= x_P + ta \\ y &= y_P + tb \\ z &= z_P + tc \end{aligned} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

одређен скуп свих тачака $X(x, y, z)$ које припадају правој p . Тада кажемо да је права задата у *параметарском* облику. Ако изразимо t из сваке једнакости, имаћемо да је

$$\frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}.$$

Другачије записано, имамо да је са

$$\left. \begin{aligned} x &= x_P + ta \\ y &= y_P + tb \\ z &= z_P + tc \end{aligned} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

одређен скуп свих тачака $X(x, y, z)$ које припадају правој p . Тада кажемо да је права задата у *параметарском* облику. Ако изразимо t из сваке једнакости, имаћемо да је

$$\frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}.$$

Кажемо да је тада права дата у *канонском* облику.

Другачије записано, имамо да је са

$$\left. \begin{aligned} x &= x_P + ta \\ y &= y_P + tb \\ z &= z_P + tc \end{aligned} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

одређен скуп свих тачака $X(x, y, z)$ које припадају правој p . Тада кажемо да је права задата у *параметарском* облику. Ако изразимо t из сваке једнакости, имаћемо да је

$$\frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}.$$

Кажемо да је тада права дата у *канонском* облику.

Некад је у задатку права задата као пресек две разне равни.

Нека су дате праве $p(P, \vec{v}_p)$ и $q(Q, \vec{v}_q)$. Имамо могућности:

❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p = \lambda \vec{v}_q$:

Нека су дате праве $p(P, \vec{v}_p)$ и $q(Q, \vec{v}_q)$. Имамо могућности:

- ❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p = \lambda \vec{v}_q$: Тада је $p \parallel q$.

Нека су дате праве $p(P, \vec{v}_p)$ и $q(Q, \vec{v}_q)$. Имамо могућности:

- ❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p = \lambda \vec{v}_q$: Тада је $p \parallel q$. Специјално, ако је $P \in q$, тада је $p = q$.

Нека су дате праве $p(P, \vec{v}_p)$ и $q(Q, \vec{v}_q)$. Имамо могућности:

- ❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p = \lambda \vec{v}_q$: Тада је $p \parallel q$. Специјално, ако је $P \in q$, тада је $p = q$. Растојање између две паралелне праве једнако је растојању између произвољне тачке једне праве и њене пројекције на другу праву.

Нека су дате праве $p(P, \vec{v}_p)$ и $q(Q, \vec{v}_q)$. Имамо могућности:

- ❶ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p = \lambda \vec{v}_q$: Тада је $p \parallel q$. Специјално, ако је $P \in q$, тада је $p = q$. Растојање између две паралелне праве једнако је растојању између произвољне тачке једне праве и њене пројекције на другу праву. Важи формула:

$$d(p, q) = d(P, q) = \frac{|\vec{v}_p \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{v}_p|}$$

2 $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q:$

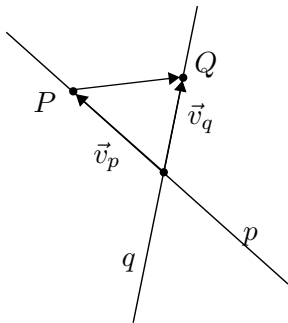
- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q$: Уколико праве p и q припадају истој равни, онда се морају сећи. У супротном, кажемо да су праве p и q *мимоплазне*.

- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q$: Уколико праве p и q припадају истој равни, онда се морају сећи. У супротном, кажемо да су праве p и q *мимоплазне*.

Праве p и q су компланарне, ако и само ако су то и вектори $\vec{v}_p, \vec{v}_q$ и $\overrightarrow{PQ}$.

- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q$: Уколико праве p и q припадају истој равни, онда се морају сећи. У супротном, кажемо да су праве p и q *мимочилазне*.

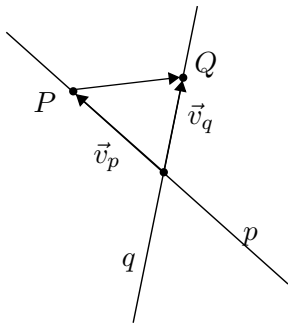
Праве p и q су компланарне, ако и само ако су то и вектори $\vec{v}_p, \vec{v}_q$ и $\overrightarrow{PQ}$.



- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q$: Уколико праве p и q припадају истој равни, онда се морају сећи. У супротном, кажемо да су праве p и q *мимоплазне*.

Праве p и q су компланарне, ако и само ако су то и вектори $\vec{v}_p, \vec{v}_q$ и $\overrightarrow{PQ}$.

Дакле, ако је:



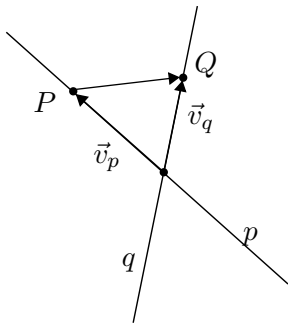
- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q$: Уколико праве p и q припадају истој равни, онда се морају сећи. У супротном, кажемо да су праве p и q *мимоплазне*.

Праве p и q су компланарне, ако и само ако су то и вектори $\vec{v}_p$, $\vec{v}_q$ и $\overrightarrow{PQ}$.

Дакле, ако је:

- $[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \overrightarrow{PQ}] = 0$, праве p и q се секу. За мањи угао који заклапају важи:

$$\cos \angle(p, q) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|}$$



- ② $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{v}_p \neq \lambda \vec{v}_q$: Уколико праве p и q припадају истој равни, онда се морају сећи. У супротном, кажемо да су праве p и q *мимоилазне*.

Праве p и q су компланарне, ако и само ако су то и вектори $\vec{v}_p$, $\vec{v}_q$ и $\overrightarrow{PQ}$.

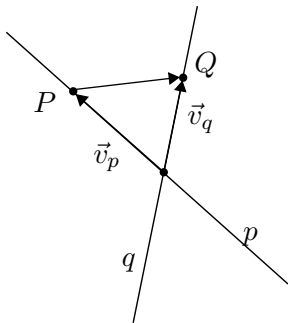
Дакле, ако је:

- $[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \overrightarrow{PQ}] = 0$, праве p и q се секу. За мањи угао који заклапају важи:

$$\cos \angle(p, q) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{v}_q|}$$

- $[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$, праве p и q су мимоилазне. Важи

$$d(p, q) = \frac{|[\vec{v}_p, \vec{v}_q, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{v}_p \times \vec{v}_q|}.$$



Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

❶ $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$:

Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

- ❶ $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$: Тада је $p \parallel \alpha$.

Специјално, ако је $P \in \alpha$,
тада је $p \subset \alpha$. Растојање
између праве и равни
рачунамо као

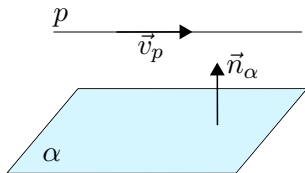
$$d(p, \alpha) = d(P, \alpha).$$

Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

❶ $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$: Тада је $p \parallel \alpha$.

Специјално, ако је $P \in \alpha$,
тада је $p \subset \alpha$. Растојање
између праве и равни
рачунамо као

$$d(p, \alpha) = d(P, \alpha).$$



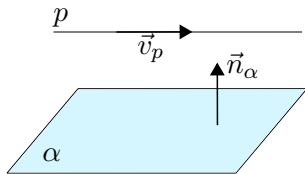
❷ $\vec{v}_p \not\perp \vec{n}_\alpha$:

Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

- ❶ $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$: Тада је $p \parallel \alpha$.

Специјално, ако је $P \in \alpha$,
тада је $p \subset \alpha$. Растојање
између праве и равни
рачунамо као

$$d(p, \alpha) = d(P, \alpha).$$



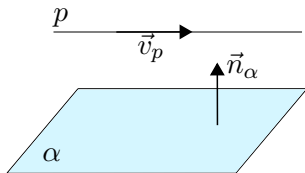
- ❷ $\vec{v}_p \not\perp \vec{n}_\alpha$: Тада се p и α
секу.

Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

- ❶ $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$: Тада је $p \parallel \alpha$.

Специјално, ако је $P \in \alpha$,
тада је $p \subset \alpha$. Растојање
између праве и равни
рачунамо као

$$d(p, \alpha) = d(P, \alpha).$$



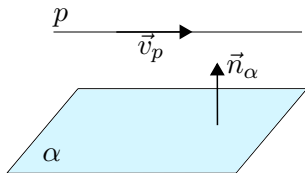
- ❷ $\vec{v}_p \not\perp \vec{n}_\alpha$: Тада се p и α
секу. За мањи угао који
заклапају p и α важи
$$\sin \angle(p, \alpha) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{n}_\alpha|}.$$

Нека су дате раван $\alpha(A, \vec{n}_\alpha)$ и права $p(P, \vec{v}_p)$. Имамо наредне случајеве:

- ❶ $\vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha$: Тада је $p \parallel \alpha$.

Специјално, ако је $P \in \alpha$,
тада је $p \subset \alpha$. Растојање
између праве и равни
рачунамо као

$$d(p, \alpha) = d(P, \alpha).$$



- ❷ $\vec{v}_p \not\perp \vec{n}_\alpha$: Тада се p и α
секу. За мањи угао који
заклапају p и α важи
$$\sin \angle(p, \alpha) = \frac{|\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{v}_p| \cdot |\vec{n}_\alpha|}.$$

