Низови

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Низови

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Примери:

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Примери:

- $a_n = n$: $1, 2, 3, 4$...

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Примери:

- $a_n = n$: $1, 2, 3, 4...$
- $a_n = \dfrac{1}{n}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...$

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Примери:

- $a_n = n$: $1, 2, 3, 4...$
- $a_n = \dfrac{1}{n}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...$
- $a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, ...$

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Примери:

- $a_n = n$: $1, 2, 3, 4...$
- $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$
- $a_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1, ...$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n.

Примери:

- $a_n = n$: $1, 2, 3, 4...$
- $a_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$
- $a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, ...$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} : -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$
- $a_n = \frac{\cos n}{n^2} : \cos 1, \frac{\cos 2}{4}, \frac{\cos 3}{9}, \frac{\cos 4}{16}, ...$

Konvergencija nizova

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n), а за сам низ кажемо да је **конвергентан.** За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

Konvergencija nizova

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow \ |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n), а за сам низ кажемо да је **конвергентан.** За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n), а за сам низ кажемо да је **конвергентан.** За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.
- Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тада важи:
    1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n,$

Konvergencija nizova

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n), а за сам низ кажемо да је **конвергентан.** За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.
- Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тада важи:
    1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
    2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

Konvergencija nizova

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n), а за сам низ кажемо да је **конвергентан.** За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.
- Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тада важи:
    1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
    2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
    3. Ako je $b_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Теорема о три низа

Теорема: Ако је $b_n \leq a_n \leq c_n$ и важи

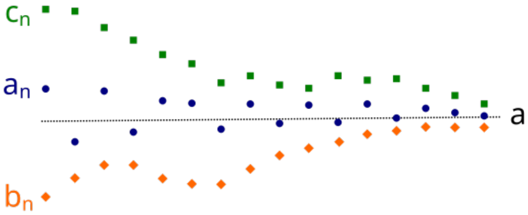
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теорема: Ако је $b_n \leq a_n \leq c_n$ и важи

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.



- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.

- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.
- Алтернативно, тачка нагомилавања низа је гранична вредност неког његовог конвергентног подниза.

- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.
- Алтернативно, тачка нагомилавања низа је гранична вредност неког његовог конвергентног подниза.
- Гранична вредност конвергентног низа је уједно и његова тачка нагомилавања.

Тачке нагомилавања низа

- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.
- Алтернативно, тачка нагомилавања низа је гранична вредност неког његовог конвергентног подниза.
- Гранична вредност конвергентног низа је уједно и његова тачка нагомилавања.
- Низ је конвергентан ако и само ако има тачно једну тачку нагомилавања, која је притом из $\mathbb{R}$.

Пример: Дат је низ $a_n = (1 + (-1)^n) \sin \frac{2n\pi}{3}$.

Пример: Дат је низ $a_n = (1 + (-1)^n) \sin \frac{2n\pi}{3}$.

Нека је $b_n = 1 + (-1)^n$ и $c_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$. Тада из табеле

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
b_n	0	2	0	2	0	2	0	2	0	…
c_n	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	…
$a_n = b_n \cdot c_n$	0	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0	0	0	$-\sqrt{3}$	0	…

Пример: Дат је низ $a_n = (1 + (-1)^n) \sin \dfrac{2n\pi}{3}$.

Нека је $b_n = 1 + (-1)^n$ и $c_n = \sin \dfrac{2n\pi}{3}$. Тада из табеле

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dots$
b_n	0	2	0	2	0	2	0	2	0	$\dots$
c_n	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\dots$
$a_n = b_n \cdot c_n$	0	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0	0	0	$-\sqrt{3}$	0	$\dots$

једноставно закључујемо да низ a_n има три тачке нагомилавања, $-\sqrt{3}$, 0 и $\sqrt{3}$.