

Факултет организационих наука

Низови

Вукашин Брковић

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Примери:

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Примери:

- $a_n = n$: 1, 2, 3, 4...

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Примери:

- $a_n = n$: 1, 2, 3, 4...
- $a_n = \frac{1}{n}$: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Примери:

- $a_n = n$: 1, 2, 3, 4...
- $a_n = \frac{1}{n}$: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...
- $a_n = (-1)^n$: -1, 1, -1, 1, ...

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Примери:

- $a_n = n: 1, 2, 3, 4, \dots$
- $a_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
- $a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} : -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ ћемо означавати са a_n .

Примери:

- $a_n = n: 1, 2, 3, 4, \dots$
- $a_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
- $a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} : -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$
- $a_n = \frac{\cos n}{n^2} : \cos 1, \frac{\cos 2}{4}, \frac{\cos 3}{9}, \frac{\cos 4}{16}, \dots$

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n) , а за сам низ кажемо да је **конвергентан**. За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n) , а за сам низ кажемо да је **конвергентан**. За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n) , а за сам низ кажемо да је **конвергентан**. За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.
- Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тада важи:
 - ❶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n) , а за сам низ кажемо да је **конвергентан**. За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.
- Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тада важи:
 - ❶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$
 - ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$

Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon),$$

тада кажемо да је a **гранична вредност** низа (a_n) , а за сам низ кажемо да је **конвергентан**. За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

- Конвергентан низ има тачно једну граничну вредност.

- Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тада важи:

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Ако је } b_n \neq 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, \text{ тада је } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Теорема: Ако је $b_n \leq a_n \leq c_n$ и важи

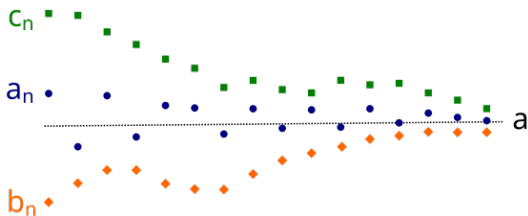
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Теорема: Ако је $b_n \leq a_n \leq c_n$ и важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.



- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.

- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.
- Тачка $a \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања низа ако је гранична вредност неког његовог конвергентног подниза.

- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.
- Тачка $a \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања низа ако је гранична вредност неког његовог конвергентног подниза.
- Гранична вредност конвергентног низа је уједно и његова тачка нагомилавања.

- Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако свака околина те тачке садржи бесконачно много чланова тог низа.
- Тачка $a \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања низа ако је гранична вредност неког његовог конвергентног подниза.
- Гранична вредност конвергентног низа је уједно и његова тачка нагомилавања.
- Низ је конвергентан ако и само ако има тачно једну тачку нагомилавања, која је притом из $\mathbb{R}$.

Пример: Дат је низ $a_n = (1 + (-1)^n) \sin \frac{2n\pi}{3}$.

Пример: Дат је низ $a_n = (1 + (-1)^n) \sin \frac{2n\pi}{3}$.

Нека је $b_n = 1 + (-1)^n$ и $c_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$. Тада из табеле

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
b_n	0	2	0	2	0	2	0	2	0	...
c_n	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	...
$a_n = b_n \cdot c_n$	0	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0	0	0	$-\sqrt{3}$	0	...

Пример: Дат је низ $a_n = (1 + (-1)^n) \sin \frac{2n\pi}{3}$.

Нека је $b_n = 1 + (-1)^n$ и $c_n = \sin \frac{2n\pi}{3}$. Тада из табеле

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
b_n	0	2	0	2	0	2	0	2	0	...
c_n	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	...
$a_n = b_n \cdot c_n$	0	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0	0	0	$-\sqrt{3}$	0	...

једноставно закључујемо да низ a_n има три тачке нагомилавања, $-\sqrt{3}$, 0 и $\sqrt{3}$.