

I колоквијум 2022/23 - прва група

1. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$2xy^3 dx - (1 - x^2y^2) dy = 0$$

које задовољава услов $y(1) = 2$.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y'' - y' - y = (4x + 2) \cos x + 6 \sin x.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z^2+1}.$$

Решења:

1. Из једначине видимо да важи

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - x^2y^2}{2xy^3} = \frac{1}{2y^3}x^{-1} - \frac{1}{2y}x \Leftrightarrow x' + \frac{1}{2y}x = \frac{1}{2y^3}x^{-1},$$

односно имамо Бернулијеву једначину за $\alpha = -1$. Ако уведемо смену $z = x^{1+1} = x^2$, одакле је $x = z^{1/2}$ и $x' = \frac{1}{2}z^{-1/2}z'$ добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z^{-1/2}z' + \frac{1}{2y}z^{1/2} &= \frac{1}{2y^3}z^{-1/2} \quad / \cdot 2z^{1/2} \\ z' + \frac{1}{y}z &= \frac{1}{y^3}, \end{aligned}$$

што представља линеарну диференцијалну једначину првог реда, чије је опште решење

$$z(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(C + \int \frac{1}{y^3} e^{\int \frac{1}{y} dy} dy \right) = \frac{1}{y} \left(C + \int \frac{1}{y^3} \cdot y dy \right) = \frac{1}{y} \left(C - \frac{1}{y} \right) = \frac{Cy - 1}{y^2}.$$

Дакле, опште решење почетне једначине је

$$x^2 = \frac{Cy - 1}{y^2},$$

одакле из датог почетног услова једноставно одређујемо и решење Кошијевог проблема:

$$1^2 = \frac{C \cdot 2 - 1}{2^2} \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{5y - 2}{2y^2}.$$

2. Опште решење одговарајуће хомогене једначине добијамо тако што најпре одредимо решења карактеристичне једначине:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = 0,$$

одакле је $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 1$, односно опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x.$$

Из облика дате функције $f(x) = (4x + 2) \cos x + 6 \sin x$ видимо да $k = 0$ јер $0 + 1i$ није нула карактеристичне једначине, те је облик партикуларног решења дат са:

$$y_p = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x.$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$\begin{aligned} y_p' &= (Cx + A + D) \cos x + (-Ax - B + C) \sin x, \\ y_p'' &= (-Ax - B + 2C) \cos x + (-Cx - 2A - D) \sin x, \\ y_p''' &= (-Cx - 3A - D) \cos x + (Ax + B - 3C) \sin x. \end{aligned}$$

Заменом y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у дату једначину, након сређивања добијамо да је

$$\begin{aligned} (4x + 2) \cos x + 6 \sin x &= ((-2A - 2C)x - 4A - 2B + 2C - 2D) \cos x + \\ &+ ((2A - 2C)x - 2A + 2B - 4C - 2D) \sin x, \end{aligned}$$

па изједначавајући коефицијенте уз $\cos x$, $\sin x$, $x \cos x$ и $x \sin x$ на обе стране добијамо систем

$$\left. \begin{aligned} -4A - 2B + 2C - 2D &= 2 \\ -2A + 2B - 4C - 2D &= 6 \\ -2A - 2C &= 4 \\ 2A - 2C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

чије је решење $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 0$. Дакле, партикуларно решење је $y_p = -x \cos x - x \sin x$, одакле добијамо опште решење почетне диференцијалне једначине:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x - x \cos x - x \sin x.$$

3. Видимо најпре да из

$$\frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{x dx + y dy}{x(x - y) + y(x + y)} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

следи

$$2 \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \Rightarrow 2 \int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} z + C = \ln(x^2 + y^2),$$

одакле добијамо један први интеграл

$$\ln(x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arctg} z = C_1.$$

Даље, из датог система имамо да је

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y} \Leftrightarrow y'_x = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}},$$

чиме смо добили хомогену диференцијалну једначину првог реда, коју решавамо сменом $y = wx$, одакле је $y' = w'x + w$ и

$$w'x + w = \frac{1 + w}{1 - w} \Rightarrow \frac{dw}{dx} x = \frac{1 + w - w + w^2}{1 - w}.$$

Сада имамо једначину у којој можемо да раздвојимо променљиве, па је даље:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(1-w)dw}{1+w^2} \Leftrightarrow \ln|x| + C = \operatorname{arctg} w - \frac{1}{2} \ln(1+w^2),$$

одакле заменом $w = y/x$ добијамо још један први интеграл система:

$$\ln(x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2.$$

Ови први интеграли су независни и чине решење датог система јер, ако је $\varphi_1(x, y, t) = \ln(x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arctg} z$ и $\varphi_2(x, y, t) = \ln(x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2x+2y}{x^2+y^2} & \frac{2y-2x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{-4}{x^2+y^2} \neq 0.$$

I колоквијум 2022/23 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = (6x + 8)e^{2x}.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2 + 1 - yt} = \frac{dy}{xt + xy} = \frac{dt}{xt}.$$

Решења:

1. Уколико поделимо једначину са x , добићемо

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{y}{x}\right),$$

па можемо препознати хомогену диференцијалну једначину. Након увођења смене $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$ и $y' = z'x + z$, имамо да је

$$z'x + z - z = (1 + z) \ln(1 + z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = (1 + z) \ln(1 + z),$$

па добијамо једначину у којој можемо раздвојити променљиве

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)},$$

одакле је

$$\ln|x| + C' = \int \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)} = \left[\begin{matrix} t = \ln(1 + z) \\ dt = \frac{dz}{1 + z} \end{matrix} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|,$$

па даље добијамо да је $t = xC$, за $C = \pm e^{C'}$, односно након враћања смене, једноставно добијамо опште решење дате диференцијалне једначине:

$$\ln \frac{x + y}{x} = xC.$$

2. Опште решење одговарајуће хомогене једначине добијамо тако што најпре одредимо решења карактеристичне једначине:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$

одакле је $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, односно опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Из облика дате функције $f(x) = (6x + 8)e^{2x}$ видимо да $k = 1$ јер $2 + 0i$ једнострука нула карактеристичне једначине, те је облик партикуларног решења дат са:

$$y_p = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$\begin{aligned} y_p' &= (2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) e^{2x}, \\ y_p'' &= (4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B) e^{2x}, \\ y_p''' &= (8Ax^2 + (24A + 8B)x + 12A + 12B) e^{2x}. \end{aligned}$$

Заменом y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у дату једначину, након сређивања добијамо да је

$$(6Ax + 8A + 3B) e^{2x} = (6x + 8) e^{2x},$$

па коефицијенте A и B добијамо из система

$$\left. \begin{aligned} 6A &= 6 \\ 8A + 3B &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1, B = 0.$$

Дакле, партикуларно решење је $y_p = x^2 e^{2x}$, па је, коначно, опште решење почетне диференцијалне једначине:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + x^2 e^{2x}.$$

3. Видимо најпре да из

$$\frac{dt}{xt} = \frac{x dx + y dy}{x(x^2 + 1 - yt) + y(xt + xy)} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x(x^2 + y^2 + 1)}$$

следи

$$2 \frac{dt}{t} = \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow 2 \int \frac{dt}{t} = \int \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow 2 \ln |t| + C = \ln(x^2 + y^2 + 1),$$

одакле добијамо један први интеграл

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{t^2} = C_1.$$

Даље, из датог система имамо да је

$$\frac{dy}{t + y} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{y + t}{t} \Leftrightarrow y_t' - \frac{y}{t} = 1,$$

чиме смо добили линеарну диференцијалну једначину првог реда, чије је решење

$$y = e^{\int \frac{1}{t} dt} \left(C + \int 1 \cdot e^{-\int \frac{1}{t} dt} dt \right) = t \left(C + \int \frac{1}{t} dt \right) = Ct + t \ln |t|,$$

одакле директно добијамо још један први интеграл система:

$$\frac{y}{t} - \ln |t| = C_2.$$

Ови први интегрални су независни и чине решење датог система јер, ако је $\varphi_1(x, y, t) = (x^2 + y^2 + 1)/t^2$ и $\varphi_2(x, y, t) = y/t - \ln |t|$, важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x/t^2 & 2y/t^2 \\ 0 & 1/t \end{vmatrix} = \frac{2x}{t^3} \neq 0.$$

I колоквијум 2023/24 - друга група

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x' \cos y = x(\sin y + x \cos^4 y).$$

5. Дата је диференцијална једначина $y'' - 2y' + y = f(x)$.

а) Одредити опште решење једначине за $f(x) = 0$.

б) Одредити опште решење једначине за $f(x) = 12e^x(x^2 + x)$.

6. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xz^2 - x^2} = \frac{dy}{xy - yz^2 - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

Решења:

1. Дата једначина је еквивалентна са

$$x' \cos y - x \sin y = x^2 \cos^4 y.$$

Дељењем једначине са $\cos y$ добијамо Бернулијеву диференцијалну једначину:

$$x' - x \operatorname{tg} y = x^2 \cos^3 y.$$

Ако уведемо смену $z = x^{-1}$ (провером видимо да је $x = 0$ решење дате једначине), одакле је $x = z^{-1}$ и $x' = -z^{-2}z'$ добијамо

$$-z^{-2}z' - z^{-1} \operatorname{tg} y = z^{-2} \cos^3 y,$$

односно, множењем једначине са $-z^2$, имамо линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$(1) \quad z' + z \operatorname{tg} y = -\cos^3 y.$$

Како је

$$\int \operatorname{tg} y \, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} \, dy = \left[\begin{array}{l} t = \cos y, \\ dt = -\sin y \, dy \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos y| + C,$$

то је решење једначине (1) дато са

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{\ln |\cos y|} \left(C - \int \cos^3 y \cdot e^{-\ln |\cos y|} \, dy \right) = \cos y \left(C - \int \cos^3 y \cdot \frac{1}{\cos y} \, dy \right) \\ &= \cos y \left(C - \int \cos^2 y \, dy \right) = \cos y \left(C - \int \frac{1 + \cos 2y}{2} \, dy \right) \\ &= \cos y \left(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right). \end{aligned}$$

Коначно, опште решење почетне диференцијалне једначине је

$$x(y) = \left(\cos y \left(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \right)^{-1}.$$

2. а) На основу карактеристичне једначине

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0,$$

чија су решења $\lambda_{1,2} = 1$ добијамо опште решење дате хомогене једначине

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

б) Имајући у виду облик дате функције,

$$f(x) = e^x((12x^2 + 12x) \cos(0x) + 1 \sin(0x)),$$

видимо да је $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, па, како је $a + bi = 1$ двострука нула карактеристичног полинома, то партикуларно решење дате нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = x^2 e^x (Ax^2 + Bx + C) = e^x (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2).$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$y'_p = e^x (Ax^4 + (4A + B)x^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx),$$

односно

$$y''_p = e^x (Ax^4 + (8A + B)x^3 + (12A + 6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C).$$

Уврштајући y_p , y'_p и y''_p у дату једначину, добијамо да важи

$$e^x (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 12e^x (x^2 + x),$$

односно

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 12x^2 + 12x.$$

Поредећи коефицијенте уз чланове истог степена на обе стране добијамо да је $A = 1$, $B = 2$ и $C = 0$, односно партикуларно решење је

$$y_p = x^2 e^x (x^2 + 2x).$$

Опште решење дате нехомогене једначине је одатле

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x (x^2 + 2x).$$

3. Најпре, из

$$\frac{dx}{xz^2 - x^2} = \frac{dz}{xz},$$

добијамо да је

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz^2 - x^2}{xz} = z - \frac{x}{z},$$

одакле имамо линеарну диференцијалну једначину

$$x' + \frac{x}{z} = z,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{dz}{z}} \left(C + \int z e^{\int \frac{dz}{z}} dz \right) = e^{-\ln|z|} \left(C + \int z e^{\ln|z|} dz \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(C + \int z^2 dz \right) = \frac{1}{z} \left(C + \frac{z^3}{3} \right), \end{aligned}$$

одакле добијамо први интеграл

$$xz - \frac{z^3}{3} = C_1.$$

Даље, важи

$$\frac{y dx + x dy}{y(xz^2 - x^2) + x(xy - yz^2 - 2z^2)} = \frac{dz}{xz} \Leftrightarrow \frac{d(xy)}{-2xz^2} = \frac{dz}{xz},$$

одакле је

$$d(xy) = -2z dz.$$

Интегралењем добијамо

$$xy = -z^2 + C_2,$$

односно још један први интеграл је

$$xy + z^2 = C_2.$$

Ако је $\varphi_1(x, y, z) = xz - \frac{z^3}{3}$ и $\varphi_2(x, y, z) = xy + z^2$, онда из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = xz \neq 0,$$

закључујемо да су ови први интегрални независни, те је њима одређено решење датог система.