

II КОЛОКВИЈУМ 2021/22

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= -4x + 3y - 2z \\ y' &= -5x + 5y - z \\ z' &= x - 2y + 3z \end{aligned}$$

2. Израчунати  $\int_{C^-} \frac{\operatorname{th} iz + 8}{e^{iz} - 1} dz$ , ако је  $C = \{z \mid |z - 4 - i| = 3\}$ .

3. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y''(t) + y(t) = 4 \cos^3 t - \cos 3t + 10e^{3t}.$$

**Решења:**

1. Одредимо најпре сопствене вредности матрице система  $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 3 & -2 \\ -5 & -5 - \lambda & -1 \\ 1 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 20 = -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10), \end{aligned}$$

одакле је  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$ . Одредимо сада партикуларна решења која одговарају овим сопственим вредностима:

1.  $\lambda_1 = -2$ : Тражимо одговарајући сопствени вектор  $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  из једначине  $(A + 2I)M = \mathbf{0}$ ,

односно из

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -5 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 3b - 2c = 0 \\ -5a + 7b - c = 0 \\ a - 2b + 5c = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\}.$$

Решење овог система је  $(a, b, c) = (11\alpha, 8\alpha, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , односно имамо да је  $M = \begin{bmatrix} 11\alpha \\ 8\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ ,

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Одатле, за  $\alpha = 1$  добијамо једно партикуларно решење  $X_1(t) = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$ .

2.  $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$ : Одредимо сопствени вектор  $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  за  $\lambda_2 = 3 + i$ : Из  $(A - (3 + i)I)M = \mathbf{0}$  имамо

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 - i & 3 & -2 \\ -5 & 2 - i & -1 \\ 1 & -2 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-7 - i)a + 3b - 2c = 0 \\ -5a + (2 - i)b - c = 0 \\ a - 2b - ic = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\}.$$

Решење претходног система је  $(a, b, c) = \left(-\frac{(2+i)\alpha}{5}, -\frac{(1+3i)\alpha}{5}, \alpha\right)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , односно тражени

сопствени вектор је  $M = \left(-\frac{\alpha}{5}\right) \begin{bmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , па за  $\alpha = -5$  добијамо

$$\begin{aligned} X_{\text{kom}}(t) &= \begin{bmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ -5 \end{bmatrix} e^{(3+i)t} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot e^{3t} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -5 \cos t \end{bmatrix} e^{3t} + i \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ -5 \sin t \end{bmatrix} e^{3t}, \end{aligned}$$

одакле је

$$X_1(t) = \operatorname{Re}(X_{\text{kom}}) = \begin{bmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -5 \cos t \end{bmatrix} e^{3t},$$

односно

$$X_2(t) = \operatorname{Im}(X_{\text{kom}}) = \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ -5 \sin t \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Опште решење система је дато са

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t) \\ &= C_1 \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \cos t - \sin t \\ \cos t - 3 \sin t \\ -5 \cos t \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ -5 \sin t \end{bmatrix} e^{3t}, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} x(t) &= 11C_1 e^{-2t} + C_2(2 \cos t - \sin t)e^{3t} + C_3(\cos t + 2 \sin t)e^{3t} \\ y(t) &= 8C_1 e^{-2t} + C_2(\cos t - 3 \sin t)e^{3t} + C_3(3 \cos t + \sin t)e^{3t} \\ z(t) &= C_1 e^{-2t} - 5C_2 e^{3t} \cos t - 5C_3 e^{3t} \sin t, \end{aligned}$$

за  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ . □

**2.** Корисно је приметити да је

$$\operatorname{th} iz = \frac{\operatorname{sh} iz}{\operatorname{ch} iz} = \frac{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \frac{i \sin z}{\cos z} = i \operatorname{tg} z,$$

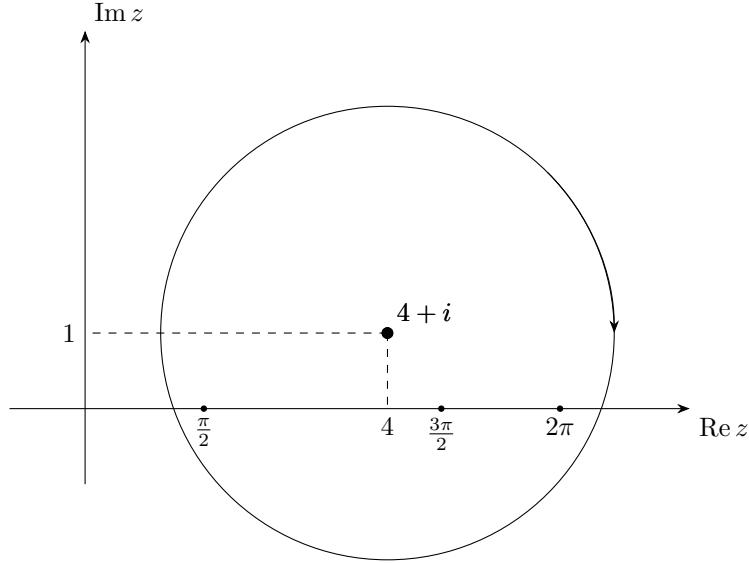
одакле је

$$f(z) = \frac{\operatorname{th} iz + 8}{e^{iz} - 1} = \frac{i \sin z + 8 \cos z}{\cos z(e^{iz} - 1)}$$

Сингуларитете ћемо одређивати из услова  $\cos z(e^{iz} - 1) = 0$ :

Најпре, из  $\cos z = 0$  имамо да је  $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ , односно  $e^{2iz} = -1$ , одакле је  $2iz = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi) \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Тачке које припадају области ограниченој датом контуром су  $z_1 = \frac{\pi}{2}$  и  $z_2 = \frac{3\pi}{2}$ .

Даље, из  $e^{iz} - 1 = 0$  добијамо да је  $e^{iz} = 1$ , односно  $iz = \operatorname{Ln}(1) = i2k\pi \Leftrightarrow z = 2k\pi$ . Тачка која припада датој области је  $z_3 = 2\pi$ .



Јасно је да су све тачке  $z_1, z_2$  и  $z_3$  полови. Неопходно је још одредити одговарајуће резидууме:

1.  $z_1 = \frac{\pi}{2}$ : Важи

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( z - \frac{\pi}{2} \right) f(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{i \sin z + 8 \cos z}{e^{iz} - 1} \cdot \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \frac{i}{i-1} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{\text{л.п.}} \frac{i}{i-1} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z} = \frac{i}{i-1} \cdot \frac{1}{-1} = \frac{i}{1-i} = \frac{i-1}{2}, \end{aligned}$$

одакле закључујемо да је  $z_1$  пол првог реда и да важи  $\text{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{i-1}{2}$ .

2.  $z_2 = \frac{3\pi}{2}$ : Аналогно претходној тачки имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left( z - \frac{3\pi}{2} \right) f(z) &= \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{i \sin z + 8 \cos z}{e^{iz} - 1} \cdot \frac{z - \frac{3\pi}{2}}{\cos z} = \frac{-i}{-i-1} \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{z - \frac{3\pi}{2}}{\cos z} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{\text{л.п.}} \frac{i}{i+1} \lim_{z \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z} = \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2}, \end{aligned}$$

па је и  $z_2$  прост пол и важи  $\text{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z) = \frac{1+i}{2}$ .

3.  $z_3 = 2\pi$ : За ову тачку важи

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2\pi} (z - 2\pi) f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{i \sin z + 8 \cos z}{\cos z} \cdot \frac{z - 2\pi}{e^{iz} - 1} = 8 \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{z - 2\pi}{e^{iz} - 1} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{\text{л.п.}} 8 \lim_{z \rightarrow 2\pi} \frac{1}{ie^{iz}} = 8 \cdot \frac{1}{i} = -8i, \end{aligned}$$

те је и ова тачка пол првог реда и важи  $\text{Res}_{z=2\pi} f(z) = -8i$ .

Коначно, за дати интеграл важи

$$\int_{C^-} f(z) dz = -2\pi i \left( \operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2\pi} f(z) \right) = -2\pi i(-7i) = -14\pi.$$

□

**3.** Видимо најпре да је

$$\begin{aligned} \cos^3 t &= \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{e^{3it} + 3^{-3it}}{2} + 3 \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t), \end{aligned}$$

одакле је  $4 \cos^3 t - \cos 3t = 3 \cos t$ . Нека је  $y(0) = C_1$  и  $y'(0) = C_2$ , и нека важи  $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$ . Применом Лапласове трансформације на једначину

$$y''(t) + y(t) = 3 \cos t + 10e^{3t}$$

добивамо алгебарску једначину

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sC_1 - C_2 + Y(s) &= 3 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + 10 \cdot \frac{1}{s - 3} \\ \Leftrightarrow Y(s)(1 + s^2) &= sC_1 + C_2 + 3 \frac{s}{s^2 + 1} + 10 \frac{1}{s - 3}, \end{aligned}$$

одакле је

$$(1) \quad Y(s) = C_1 \frac{s}{s^2 + 1} + C_2 \frac{1}{s^2 + 1} + 3 \frac{s}{(s^2 + 1)^2} + \frac{10}{(s^2 + 1)(s - 3)}.$$

Из  $\frac{10}{(s^2 + 1)(s - 3)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{C}{s - 3}$  добијамо систем линеарних једначина

$$\left. \begin{aligned} A &+ C = 0 \\ -3A + B &= 0 \\ -3B + C &= 10 \end{aligned} \right\},$$

чијим решавањем добијамо да је  $A = -1$ ,  $B = -3$  и  $C = 1$ . Враћајући се у (1) имамо да је

$$Y(s) = (C_1 - 1) \frac{s}{s^2 + 1} + (C_2 - 3) \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s - 3},$$

одакле, применом инверзне Лапласове трансформације, добијамо

$$y(t) = (C_1 - 1) \cos t + (C_2 - 3) \sin t + \frac{3}{2} t \sin t + e^{3t},$$

при чему смо искористили следећи резултат:

$$\mathcal{L}(t \sin t) = - \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right)' = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$$

□

II КОЛОКВИЈУМ 2022/23

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 2x - y - z \\y' &= 2x - y - 2z \\z' &= -4x + 4y\end{aligned}$$

2. Израчунати  $\int_{C^-} \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3} dz$ , ако је  $C = \{z : |z + 1 + i| = 2\}$ .

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) = -2 \cos 2t + 3 \int_0^t y'(x) \cos 2(t-x) dx,$$

ако је  $y(0) = 3$  и  $y'(0) = -1$ .

**Решења:**

1. За почетак, из

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1 - \lambda & -2 \\ -4 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 4),$$

закључујемо да су сопствене вредности матрице система  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ . Одредимо сада партикуларна решења која одговарају овим сопственим вредностима:

1.  $\lambda_1 = 1$  : Тражимо одговарајући сопствени вектор  $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  из једначине  $(A - I)M = \mathbf{0}$ ,

односно из

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a & -b & -c & = & 0 \\ 2a & -2b & -2c & = & 0 \\ -4a & +4b & -c & = & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Решење овог система је  $(a, b, c) = (\alpha, \alpha, 0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , односно имамо да је  $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Одатле, за  $\alpha = 1$  добијамо једно партикуларно решење  $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$ .

2.  $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ : Одредимо сопствени вектор  $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  за  $\lambda_2 = 2i$ : Из  $(A - 2iI)M = \mathbf{0}$  имамо

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 - 2i & -1 & -1 \\ 2 & -1 - 2i & -2 \\ -4 & 4 & -2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (2 - 2i)a & -b & -c & = & 0 \\ 2a & +(-1 - 2i)b & -2c & = & 0 \\ -2a & +2b & -ic & = & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Решење претходног система је  $(a, b, c) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha i)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , односно тражени сопствени вектор је  $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2i \end{bmatrix} \cdot \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , па за  $\alpha = -1$  добијамо

$$\begin{aligned} X_{\text{kom}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2i \end{bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2i \end{bmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ 2 \cos 2t + 2i \sin 2t \\ 2 \sin 2t - 2i \cos 2t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

одакле је

$$X_1(t) = \operatorname{Re}(X_{\text{kom}}) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \operatorname{Im}(X_{\text{kom}}) = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2 \sin 2t \\ -2 \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Опште решење система је дато са

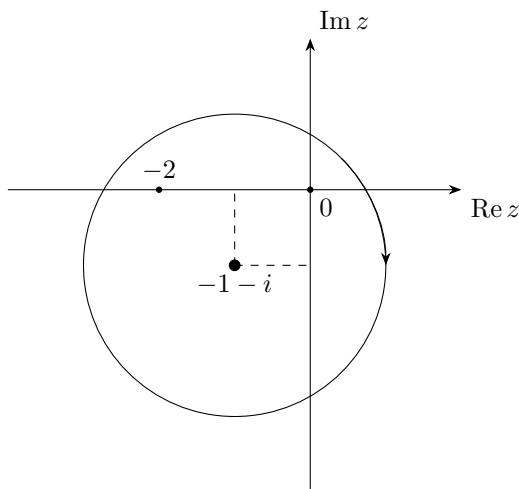
$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t) \\ &= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2 \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2 \sin 2t \\ -2 \cos 2t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

односно

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t \\ y(t) &= C_1 e^t + 2C_2 \cos 2t + 2C_3 \sin 2t \\ z(t) &= 2C_2 \sin 2t - 2C_3 \cos 2t. \end{aligned} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

**2.** Сингуларне тачке подинтегралне функције одређујемо из  $z^4 + 2z^3 = 0$ , одакле је  $z_1 = 0$  и  $z_2 = -2$ . Обе тачке припадају делу комплексне равни ограниченом контуром  $C$ .



Јасно је да је тачка  $z_2 = -2$  пол функције  $f(z) = \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3}$ , док за тачку  $z_1 = 0$  то важи због

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\pi z} - 1}{\pi z}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{\pi}{z^3 + 2z^2} = \infty.$$

Одредимо сада ког су реда ови полови:

1. Тачка  $z_1 = 0$  је пол 2. реда јер је

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\pi z} - 1}{z^2 + 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\pi z} - 1}{\pi z}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{z + 2}}_{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

2. Тачка  $z_2 = -2$  је прост пол јер важи

$$\lim_{z \rightarrow -2} (z + 2) \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3} = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{e^{\pi z} - 1}{z^3} = \frac{e^{-2\pi} - 1}{-8} \neq 0,$$

а одатле имамо и да је  $\operatorname{Res}_{z=-2} f(z) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{8}$ .

Остало је још да одредимо  $\operatorname{Res}_{z=0} f(z)$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\pi z} - 1}{z^2 + 2z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi e^{\pi z} z(z + 2) - (e^{\pi z} - 1)(2z + 2)}{z^2(z + 2)^2} \\ &\stackrel{\text{л.п.}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi^2 e^{\pi z} z(z + 2) + \pi e^{\pi z}(2z + 2) - \pi e^{\pi z}(2z + 2) - (e^{\pi z} - 1) \cdot 2}{2z(z + 2)^2 + z^2 \cdot 2(z + 2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2(z + 2)(3z + 2)} \cdot \left( \pi^2 e^{\pi z}(z + 2) - 2\pi \cdot \frac{e^{\pi z} - 1}{\pi z} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot (2\pi^2 - 2\pi) = \frac{\pi(\pi - 1)}{4}. \end{aligned}$$

Коначно, вредност траженог интеграла је

$$\int_{C^-} \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3} dz = -2\pi i \left( \frac{1 - e^{-2\pi}}{8} + \frac{\pi(\pi - 1)}{4} \right).$$

□

3. Нека је  $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$ . Тада је  $y''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - 3s + 1$ , па како је  $\mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{s}{s^2 + 4}$  и

$$\mathcal{L} \left( \int_0^t y'(x) \cos 2(t - x) dx \right) = \mathcal{L}(y'(t) * \cos 2t) = \mathcal{L}(y'(t)) \cdot \mathcal{L}(\cos 2t) = (sY(s) - 3) \cdot \frac{s}{s^2 + 4},$$

то применом Лапласове трансформације на почетну једначину добијамо алгебарску једначину

$$s^2 Y(s) - 3s + 1 = -\frac{2s}{s^2 + 4} + 3(sY(s) - 3) \cdot \frac{s}{s^2 + 4},$$

одакле је

$$\left( s^2 - \frac{3s^2}{s^2 + 4} \right) Y(s) = -\frac{11s}{s^2 + 4} + 3s - 1,$$

одакле је, након сређивања

$$Y(s) = \frac{3s^3 - s^2 + s - 4}{s^2(s^2 + 1)}.$$

Искористићемо тзв. методу неодређених коефицијената: Из

$$\frac{3s^3 - s^2 + s - 4}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1},$$

добијамо систем линеарних једначина

$$\left. \begin{array}{rcl} A & +C & = 3 \\ B & & +D = -1 \\ A & & = 1 \\ B & & = -4 \end{array} \right\},$$

одакле се једноставно добија  $A = 1$ ,  $B = -4$ ,  $C = 2$  и  $D = 3$ . Даље је

$$\frac{3s^3 - s^2 + s - 4}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{2s + 3}{s^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - 4t + 2 \cos t + 3 \sin t.$$

□

## II колоквијум 2023/24

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y - 2z \\ y' &= \quad - 2y + 3z. \\ z' &= -2x - 2y + z \end{aligned}$$

2. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\operatorname{tg} z}{z^4 + z^3} dz$ , ако је  $C = \{z : |z - i| = \frac{3}{2}\}$ .

3. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned} x' &= x + 4y + 3e^t \\ y' &= x + y + 3e^{-t} \end{aligned}$$

ако је  $x(0) = 1$  и  $y(0) = 0$ .