II **колоквијум 2021/22**

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & -4x & + & 3y & - & 2z \\ y' & = & -5x & + & 5y & - & z \\ z' & = & x & - & 2y & + & 3z \end{array}$$

2. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{C-} \frac{\operatorname{th} iz + 8}{e^{iz} - 1}\, \mathrm{d}z$, ако је $C = \{z \mid |z - 4 - i| = 3\}$.

3. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y''(t) + y(t) = 4\cos^3 t - \cos 3t + 10e^{3t}.$$

Решења:

1. Одредимо најпре сопствене вредности матрице система $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 & -2 \\ -5 & -5-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda - 20 = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10), \end{aligned}$$

одакле је $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$. Одредимо сада партикуларна решења која одговарају овим сопственим вредностима:

1. $\lambda_1 = -2$: Тражимо одговарајући сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ из једначине $(A + 2I)M = \mathbf{0}$, односно из

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -5 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcl} -2a & +3b & -2c & = & 0 \\ -5a & +7b & -c & = & 0 \\ a & -2b & +5c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење овог система је $(a, b, c) = (11\alpha, 8\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, односно имамо да је $M = \begin{bmatrix} 11\alpha \\ 8\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Одатле, за $\alpha = 1$ добијамо једно партикуларно решење $X_1(t) = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$.

2. $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$: Одредимо сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ за $\lambda_2 = 3 + i$: Из $(A - (3+i)I)M = \mathbf{0}$ имамо

$$\begin{bmatrix} -7-i & 3 & -2 \\ -5 & 2-i & -1 \\ 1 & -2 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcl} (-7-i)a & +3b & -2c & = & 0 \\ -5a & +(2-i)b & -c & = & 0 \\ a & -2b & -ic & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење претходног система је $(a,b,c)=\left(-\frac{(2+i)\alpha}{5},-\frac{(1+3i)\alpha}{5},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, односно тражени сопствени вектор је $M=\left(-\frac{\alpha}{5}\right)\begin{bmatrix}2+i\\1+3i\\-5\end{bmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, па за $\alpha=-5$ добијамо

$$\begin{aligned}X_{\text{kom}}(t)&=\begin{bmatrix}2+i\\1+3i\\-5\end{bmatrix}e^{(3+i)t}=\left(\begin{bmatrix}2\\1\\-5\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)\cdot e^{3t}(\cos t+i\sin t)\\&=\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\-5\cos t\end{bmatrix}e^{3t}+i\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\-5\sin t\end{bmatrix}e^{3t},\end{aligned}$$

одакле је

$$X_1(t)=\operatorname{Re}(X_{\text{kom}})=\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\-5\cos t\end{bmatrix}e^{3t},$$

односно

$$X_2(t)=\operatorname{Im}(X_{\text{kom}})=\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\-5\sin t\end{bmatrix}e^{3t}.$$

Опште решење система је дато са

$$\begin{aligned}X(t)&=C_1X_1(t)+C_2X_2(t)+C_3X_3(t)\\&=C_1\begin{bmatrix}11\\8\\1\end{bmatrix}e^{-2t}+C_2\begin{bmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t-3\sin t\\-5\cos t\end{bmatrix}e^{3t}+C_3\begin{bmatrix}\cos t+2\sin t\\3\cos t+\sin t\\-5\sin t\end{bmatrix}e^{3t},\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}x(t)&=11C_1e^{-2t}+C_2(2\cos t-\sin t)e^{3t}+C_3(\cos t+2\sin t)e^{3t}\\y(t)&=8C_1e^{-2t}+C_2(\cos t-3\sin t)e^{3t}+C_3(3\cos t+\sin t)e^{3t}\\z(t)&=C_1e^{-2t}-5C_2e^{3t}\cos t-5C_3e^{3t}\sin t,\end{aligned}$$

за $C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$. $\square$

2. Корисно је приметити да је

$$\operatorname{th} iz=\frac{\operatorname{sh} iz}{\operatorname{ch} iz}=\frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}=\frac{i\sin z}{\cos z}=i\operatorname{tg} z,$$

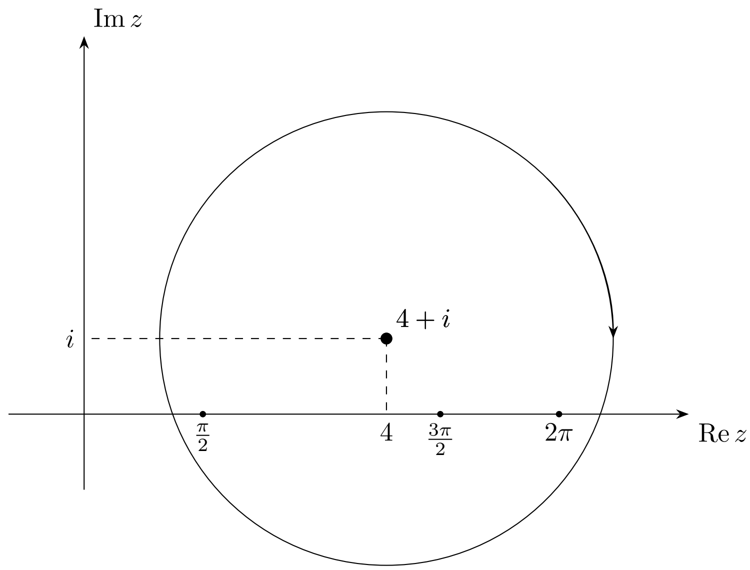
одакле је

$$f(z)=\frac{\operatorname{th} iz+8}{e^{iz}-1}=\frac{i\sin z+8\cos z}{\cos z(e^{iz}-1)}$$

Сингуларитете ћемо одређивати из услова $\cos z(e^{iz}-1)=0$:

Најпре, из $\cos z=0$ имамо да је $e^{iz}+e^{-iz}=0$, односно $e^{2iz}=-1$, одакле је $2iz=\operatorname{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\operatorname{Arg}(-1)=i(\pi+2k\pi)\ \Leftrightarrow\ z=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{R}$. Тачке које припадају области ограниченој датом контуром су $z_1=\frac{\pi}{2}$ и $z_2=\frac{3\pi}{2}$.

Даље, из $e^{iz}-1=0$ добијамо да је $e^{iz}=1$, односно $iz=\operatorname{Ln}(1)=i2k\pi\ \Leftrightarrow\ z=2k\pi$. Тачка која припада датој области је $z_3=2\pi$.



Јасно је да су све тачке z_1, z_2 и z_3 полови. Неопходно је још одредити одговарајуће резидууме:

1. $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$: Важи

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\Big(z-\frac{\pi}{2}\Big)f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{i\sin z + 8\cos z}{e^{iz}-1}\cdot\frac{z-\dfrac{\pi}{2}}{\cos z} = \frac{i}{i-1}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z-\dfrac{\pi}{2}}{\cos z}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \frac{i}{i-1}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z} = \frac{i}{i-1}\cdot\frac{1}{-1} = \frac{i}{1-i} = \frac{i-1}{2},$$

одакле закључујемо да је z_1 пол првог реда и да важи $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \dfrac{i-1}{2}$.

2. $z_2 = \dfrac{3\pi}{2}$: Аналогно претходној тачки имамо да је

$$\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\Big(z-\frac{3\pi}{2}\Big)f(z) = \lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{i\sin z + 8\cos z}{e^{iz}-1}\cdot\frac{z-\dfrac{3\pi}{2}}{\cos z} = \frac{-i}{-i-1}\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{z-\dfrac{3\pi}{2}}{\cos z}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \frac{i}{i+1}\lim_{z\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z} = \frac{i}{i+1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2},$$

па је и z_2 прост пол и важи $\operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z) = \dfrac{1+i}{2}$.

3. $z_3 = 2\pi$: За ову тачку важи

$$\lim_{z\to 2\pi}(z-2\pi)f(z) = \lim_{z\to 2\pi}\frac{i\sin z + 8\cos z}{\cos z}\cdot\frac{z-2\pi}{e^{iz}-1} = 8\lim_{z\to 2\pi}\frac{z-2\pi}{e^{iz}-1}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} 8\lim_{z\to 2\pi}\frac{1}{ie^{iz}} = 8\cdot\frac{1}{i} = -8i,$$

те је и ова тачка пол првог реда и важи $\operatorname*{Res}_{z=2\pi} f(z) = -8i$.

Коначно, за дати интеграл важи

$$\int\limits_{C-} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\frac{3\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2\pi} f(z)\right) = -2\pi i(-7i) = -14\pi.$$

□

3. Видимо најпре да је

$$\begin{aligned}\cos^3 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\big(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}\big)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3it}+3^{-3it}}{2}+3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t),\end{aligned}$$

одакле је $4\cos^3 t - \cos 3t = 3\cos t$. Нека је $y(0) = C_1$ и $y'(0) = C_2$, и нека важи $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$. Применом Лапласове трансформације на једначину

$$y''(t) + y(t) = 3\cos t + 10e^{3t}$$

добијамо алгебарску једначину

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sC_1 - C_2 + Y(s) &= 3\cdot\frac{s}{s^2+1} + 10\cdot\frac{1}{s-3}\\ \Leftrightarrow\ Y(s)(1+s^2) &= sC_1 + C_2 + 3\frac{s}{s^2+1} + 10\frac{1}{s-3},\end{aligned}$$

одакле је

$$Y(s) = C_1\frac{s}{s^2+1} + C_2\frac{1}{s^2+1} + 3\frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{10}{(s^2+1)(s-3)}. \tag{1}$$

Из $\dfrac{10}{(s^2+1)(s-3)} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{C}{s-3}$ добијамо систем линеарних једначина

$$\left.\begin{array}{rrrl} A & & +C & = 0\\ -3A & +B & & = 0\\ & -3B & +C & = 10\end{array}\right\},$$

чијим решавањем добијамо да је $A = -1$, $B = -3$ и $C = 1$. Враћајући се у (1) имамо да је

$$Y(s) = (C_1-1)\frac{s}{s^2+1} + (C_2-3)\frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s-3},$$

одакле, применом инверзне Лапласове трансформације, добијамо

$$y(t) = (C_1-1)\cos t + (C_2-3)\sin t + \frac{3}{2}t\sin t + e^{3t},$$

при чему смо искористили следећи резултат:

$$\mathscr{L}(t\sin t) = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}.$$

□

II **колоквијум 2022/23**

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 2x & - & y & - & z \\ y' & = & 2x & - & y & - & 2z \\ z' & = & -4x & + & 4y & & \end{array}$$

2. Израчунати $\displaystyle\int_{C-} \frac{e^{\pi z}-1}{z^4+2z^3}\,\mathrm{d}z$, ако је $C=\{z:\ |z+1+i|=2\}$.

3. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) = -2\cos 2t + 3\int_0^t y'(x)\cos 2(t-x)\,\mathrm{d}x,$$

ако је $y(0)=3$ и $y'(0)=-1$.

Решења:

1. За почетак, из

$$0=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2-4\lambda+4=(1-\lambda)(\lambda^2+4),$$

закључујемо да су сопствене вредности матрице система $\lambda_1=1$ и $\lambda_{2,3}=\pm 2i$. Одредимо сада партикуларна решења која одговарају овим сопственим вредностима:

1. $\lambda_1=1$: Тражимо одговарајући сопствени вектор $M=\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ из једначине $(A-I)M=\mathbf{0}$, односно из

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{array}{rrrcl} a & -b & -c & = & 0 \\ 2a & -2b & -2c & = & 0 \\ -4a & +4b & -c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

   Решење овог система је $(a,b,c)=(\alpha,\alpha,0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, односно имамо да је $M=\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\cdot\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

   Одатле, за $\alpha=1$ добијамо једно партикуларно решење $X_1(t)=\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}e^t$.

2. $\lambda_{2,3}=\pm 2i$: Одредимо сопствени вектор $M=\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ за $\lambda_2=2i$: Из $(A-2iI)M=\mathbf{0}$ имамо

$$\begin{bmatrix} 2-2i & -1 & -1 \\ 2 & -1-2i & -2 \\ -4 & 4 & -2i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{array}{rrrl} (2-2i)a & -b & -c & =0 \\ 2a & +(-1-2i)b & -2c & =0 \\ -2a & +2b & -ic & =0 \end{array}\right\}.$$

Решење претходног система је $(a,b,c) = (\alpha, 2\alpha, -2\alpha i)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, односно тражени сопствени вектор је $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2i \end{bmatrix} \cdot \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, па за $\alpha = -1$ добијамо

$$\begin{aligned} X_{\text{kom}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2i \end{bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2i \end{bmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ 2\cos 2t + 2i \sin 2t \\ 2 \sin 2t - 2i \cos 2t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

одакле је

$$X_1(t) = \operatorname{Re}(X_{\text{kom}}) = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix}, \qquad X_2(t) = \operatorname{Im}(X_{\text{kom}}) = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}.$$

Опште решење система је дато са

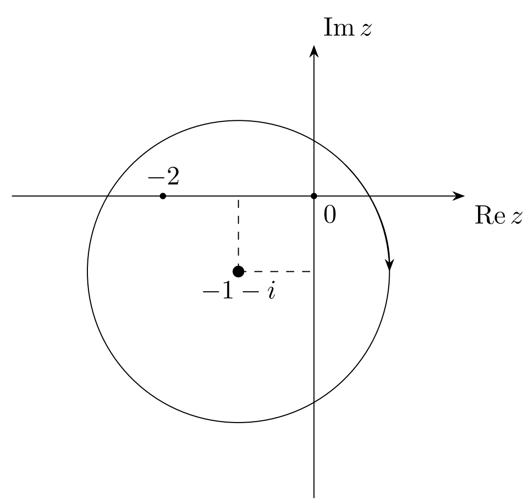
$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t) \\ &= C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 2\cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\sin 2t \\ -2\cos 2t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

односно

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t \\ y(t) &= C_1 e^t + 2C_2 \cos 2t + 2C_3 \sin 2t \\ z(t) &= 2C_2 \sin 2t - 2C_3 \cos 2t. \end{aligned}\right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

2. Сингуларне тачке подинтегралне функције одређујемо из $z^4 + 2z^3 = 0$, одакле је $z_1 = 0$ и $z_2 = -2$. Обе тачке припадају делу комплексне равни ограничном контуром C.



Јасно је да је тачка $z_2 = -2$ пол функције $f(z) = \dfrac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3}$, док за тачку $z_1 = 0$ то важи због

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 + 2z^3} = \lim_{z \to 0} \underbrace{\frac{e^{\pi z} - 1}{\pi z}}_{\to 1} \cdot \frac{\pi}{z^3 + 2z^2} = \infty.$$

Одредимо сада ког су реда ови полови:

1. Тачка $z_1 = 0$ је пол 2. реда јер је
$$\lim_{z\to 0} z^2 \cdot \frac{e^{\pi z}-1}{z^4+2z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{\pi z}-1}{z^2+2z} = \lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{e^{\pi z}-1}{\pi z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{z+2}}_{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

2. Тачка $z_2 = -2$ је прост пол јер важи
$$\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{e^{\pi z}-1}{z^4+2z^3} = \lim_{z\to -2} \frac{e^{\pi z}-1}{z^3} = \frac{e^{-2\pi}-1}{-8} \neq 0,$$
а одатле имамо и да је $\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = \dfrac{1-e^{-2\pi}}{8}$.

Остало је још да одредимо $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$:
$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0}\big(z^2 f(z)\big)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{\pi z}-1}{z^2+2z}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{\pi e^{\pi z} z(z+2) - (e^{\pi z}-1)(2z+2)}{z^2(z+2)^2} \\
&\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{\to 0} \frac{\pi^2 e^{\pi z} z(z+2) + \pi e^{\pi z}(2z+2) - \pi e^{\pi z}(2z+2) - (e^{\pi z - 1})\cdot 2}{2z(z+2)^2 + z^2\cdot 2(z+2)} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2(z+2)(3z+2)} \cdot \left(\pi^2 e^{\pi z}(z+2) - 2\pi \cdot \frac{e^{\pi z}-1}{\pi z}\right) \\
&= \frac{1}{8}\cdot(2\pi^2 - 2\pi) = \frac{\pi(\pi-1)}{4}.
\end{aligned}$$

Коначно, вредност траженог интеграла је
$$\int\limits_{C^-} \frac{e^{\pi z}-1}{z^4+2z^3}\,\mathrm{d}z = -2\pi i\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{8} + \frac{\pi(\pi-1)}{4}\right).$$

□

3. Нека је $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$. Тада је $y''(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^2Y(s) - 3s + 1$, па како је $\mathscr{L}(\cos 2t) = \dfrac{s}{s^2+4}$ и
$$\mathscr{L}\left(\int\limits_0^t y'(x)\cos 2(t-x)\,\mathrm{d}x\right) = \mathscr{L}\left(y'(t) * \cos 2t\right) = \mathscr{L}(y'(t))\cdot\mathscr{L}(\cos 2t) = (sY(s)-3)\cdot\frac{s}{s^2+4},$$
то применом Лапласове трансформације на почетну једначину добијамо алгебарску једначину
$$s^2Y(s) - 3s + 1 = -\frac{2s}{s^2+4} + 3(sY(s)-3)\cdot\frac{s}{s^2+4},$$
одакле је
$$\left(s^2 - \frac{3s^2}{s^2+4}\right)Y(s) = -\frac{11s}{s^2+4} + 3s - 1,$$
одакле је, након сређивања
$$Y(s) = \frac{3s^3 - s^2 + s - 4}{s^2(s^2+1)}.$$
Искористићемо тзв. методу неодређених коефицијената: Из
$$\frac{3s^3 - s^2 + s - 4}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1},$$

добијамо систем линеарних једначина

$$\left.\begin{array}{lllll} A & +C & & = 3 \\ & B & +D & = -1 \\ A & & & = 1 \\ & B & & = -4 \end{array}\right\},$$

одакле се једноставно добија $A = 1$, $B = -4$, $C = 2$ и $D = 3$. Даље је

$$\frac{3s^3 - s^2 + s - 4}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{2s+3}{s^2+1} \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} 1 - 4t + 2\cos t + 3\sin t.$$

$\square$

II **колоквијум 2023/24**

1. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{array}{lllllll} x' & = & x & + & 2y & - & 2z \\ y' & = & & - & 2y & + & 3z. \\ z' & = & -2x & - & 2y & + & z \end{array}$$

2. Израчунати $\displaystyle\int_{C+} \frac{\operatorname{tg} z}{z^4 + z^3}\,\mathrm{d}z$, ако је $C = \{z : |z - i| = \frac{3}{2}\}$.

3. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{array}{lllllll} x' & = & x & + & 4y & + & 3e^t \\ y' & = & x & + & y & + & 3e^{-t} \end{array}$$

ако је $x(0) = 1$ и $y(0) = 0$.

Решења:

1. Из детерминанте

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

закључујемо да су сопствене вредности матрице система $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$. Одредимо сада партикуларна решења која одговарају овим сопственим вредностима:

1. $\lambda_1 = 0$: Тражимо одговарајући сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ из једначине $(A - 0I)M = \mathbf{0}$, односно из

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcl} a & +2b & -2c & = & 0 \\ & -2b & +3c & = & 0 \\ -2a & -2b & +c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење овог система је $(a, b, c) = (\alpha, -3\alpha/2, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, односно имамо да је $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ -3\alpha/2 \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Одатле, за $\alpha = -2$ добијамо једно партикуларно решење $X_1(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. $\lambda_1 = 1$: Одређујемо $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ из једначине $(A - I)M = \mathbf{0}$, односно из

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcl} & 2b & -2c & = & 0 \\ & -3b & +3c & = & 0 \\ -2a & -2b & & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Једноставно добијамо да је $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, па за $\alpha = -1$ добијамо друго партикуларно решење $X_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$.

3. $\lambda_1 = -1$: Из једначине $(A + I)M = \mathbf{0}$, односно из

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rrrcl} 2a & +2b & -2c & = & 0 \\ & -b & +3c & = & 0 \\ -2a & -2b & +2c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

добијамо да је $M = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, па за $\alpha = 1$ добијамо последње партикуларно решење $X_3(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$.

Коначно, опште решење датог система је $X(t) = C_1X_1(t)+C_2X_2(t)+C_3X_3(t)$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, односно

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = -2C_1 - C_2e^t - 2C_3e^{-t} \\ y(t) = 3C_1 + C_2e^t + 3C_3e^{-t} \\ z(t) = 2C_1 + C_2e^t + C_3e^{-t}. \end{array}\right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

2. Нека је $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^4 + z^3} = \dfrac{\sin z}{z^3(z + 1)\cos z}$. Сингуларне тачке ове функције ћемо тражити међу решењима једначине $z^3(z + 1)\cos z = 0$.

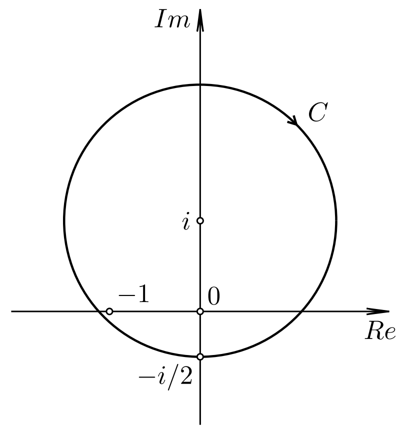
Најпре, из $\cos z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 0$ добијамо да је

$$2iz = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

односно $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Јасно је да ниједна таква тачка не припада области D коју затвара контура C.

Даље, из $z^3(z + 1) = 0$ добијамо да су кандидати $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$. Тривијално је да $z_1 \in D$, док није тешко показати и $z_2 \in D$ јер $|-1 - i| = \sqrt{2} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow 8 < 9$.

Дакле, имамо две сингуларне тачке које припадају задатој области, и за обе се лако показује да су полови.



Одредимо резидууме за тачке z_1 и z_2:

1. Тачка $z_1 = 0$ је пол другог реда, јер важи

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} z^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} z}{z^4+z^3} = \lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{\sin z}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos z}{z+1}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

   Резидуум је даље

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\big(z^2 f(z)\big)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z^2+z}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 z}\cdot (z^2+z) - \operatorname{tg} z \cdot (2z+1)}{(z^2+z)^2}$$
$$= \lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{1}{(z+1)^2\cos^2 z}}_{\to 1}\left(1 - \underbrace{\frac{\sin z}{z}}_{\to 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\cos z}_{\to 1} + \underbrace{\frac{z - \sin z \cos z}{z^2}}_{\to 0}\right) = -1,$$

   при чему смо користили следећи резултат:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z\cos z}{z^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 2z}{2z} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{z\to 0} \frac{2\sin 2z}{2} = 0.$$

2. Тачка $z_2 = -1$ је прост пол, јер важи

$$\lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{\operatorname{tg} z}{z^3} = -\operatorname{tg}(-1) = \operatorname{tg} 1 \neq 0.$$

   Стога, имамо и $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \operatorname{tg} 1$.

Коначно, на основу израчунатих резидуума, закључујемо да је вредност траженог интеграла једнака

$$\int\limits_{C+} \frac{\operatorname{tg} z}{z^4+z^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(-1+\operatorname{tg} 1).$$

□

3. Ако је $x(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} X(s)$ и $y(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y(s)$, тада ако применимо Лапласову трансформацију на дати систем, добијамо систем

$$\left.\begin{aligned} sX(s) - 1 &= X(s) + 4Y(s) + \frac{3}{s-1} \\ sY(s) &= X(s) + Y(s) + \frac{3}{s+1} \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} (s-1)X(s) - 4Y(s) &= \frac{s+2}{s-1} \\ -X(s) + (s-1)Y(s) &= \frac{3}{s+1} \end{aligned}\right\}.$$

Добијени систем ћемо решавати Крамеровом методом: Важи

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 2s - 3 = (s+1)(s-3),$$

односно

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{s+2}{s-1} & -4 \\ \frac{3}{s+1} & s-1 \end{vmatrix} = \frac{s^2+3s+14}{s+1}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} s-1 & \frac{s+2}{s-1} \\ -1 & \frac{3}{s+1} \end{vmatrix} = \frac{4s^2-3s+5}{(s+1)(s-1)},$$

одакле је

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{s^2+3s+14}{(s+1)^2(s-3)},$$

односно

$$Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4s^2-3s+5}{(s+1)^2(s-1)(s-3)}.$$

Применом методе неодређених коефицијената, добијамо да је

$$X(s) = -\frac{1}{s+1} - \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{2}{s-3},$$

односно

$$Y(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3}.$$

Применом инверзне Лапласове трансформације, лако закључујемо да важи

$$x(t) = -e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^{3t},$$
$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t} - \frac{3}{4}e^{t} + e^{3t}.$$

□