

I колоквијум 2022/23 - прва група

1. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$2xy^3 dx - (1 - x^2y^2) dy = 0$$

које задовољава услов $y(1) = 2$.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y'' - y' - y = (4x + 2) \cos x + 6 \sin x.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} = \frac{dz}{z^2+1}.$$

Решења:

1. Из једначине видимо да важи

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - x^2y^2}{2xy^3} = \frac{1}{2y^3}x^{-1} - \frac{1}{2y}x \quad \Leftrightarrow \quad x' + \frac{1}{2y}x = \frac{1}{2y^3}x^{-1},$$

односно имамо Бернулијеву једначину за $\alpha = -1$. Ако уведемо смену $z = x^{1+1} = x^2$, одакле је $x = z^{1/2}$ и $x' = \frac{1}{2}z^{-1/2}z'$ добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z^{-1/2}z' + \frac{1}{2y}z^{1/2} &= \frac{1}{2y^3}z^{-1/2} \quad \Bigg/ \cdot 2z^{1/2} \\ z' + \frac{1}{y}z &= \frac{1}{y^3}, \end{aligned}$$

што представља линеарну диференцијалну једначину првог реда, чије је опште решење

$$z(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(C + \int \frac{1}{y^3} e^{\int \frac{1}{y} dy} dy \right) = \frac{1}{y} \left(C + \int \frac{1}{y^3} \cdot y dy \right) = \frac{1}{y} \left(C - \frac{1}{y} \right) = \frac{Cy - 1}{y^2}.$$

Дакле, опште решење почетне једначине је

$$x^2 = \frac{Cy - 1}{y^2},$$

одакле из датог почетног услова једноставно одређујемо и решење Кошијевог проблема:

$$1^2 = \frac{C \cdot 2 - 1}{2^2} \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{5y - 2}{2y^2}.$$

2. Опште решење одговарајуће хомогене једначине добијамо тако што најпре одредимо решења карактеристичне једначине:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = 0,$$

одакле је $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 1$, односно опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x.$$

Из облика дате функције $f(x) = (4x+2)\cos x + 6\sin x$ видимо да $k = 0$ јер $0 + 1i$ није нула карактеристичне једначине, те је облик партикуларног решења дат са:

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$\begin{aligned} y_p' &= (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x, \\ y_p'' &= (-Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x, \\ y_p''' &= (-Cx - 3A - D)\cos x + (Ax + B - 3C)\sin x. \end{aligned}$$

Заменом y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у дату једначину, након сређивања добијамо да је

$$\begin{aligned} (4x+2)\cos x + 6\sin x &= ((-2A-2C)x - 4A - 2B + 2C - 2D)\cos x + \\ &+ ((2A-2C)x - 2A + 2B - 4C - 2D)\sin x, \end{aligned}$$

па изједначавајући коефицијенте уз $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$ и $x\sin x$ на обе стране добијамо систем

$$\left. \begin{aligned} -4A - 2B + 2C - 2D &= 2 \\ -2A + 2B - 4C - 2D &= 6 \\ -2A - 2C &= 4 \\ 2A - 2C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

чије је решење $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 0$. Дакле, партикуларно решење је $y_p = -x\cos x - x\sin x$, одакле добијамо опште решење почетне диференцијалне једначине:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x - x\cos x - x\sin x.$$

3. Видимо најпре да из

$$\frac{dz}{z^2+1} = \frac{x dx + y dy}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

следи

$$2 \frac{dz}{z^2+1} = \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \Rightarrow 2 \int \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} z + C = \ln(x^2 + y^2),$$

одакле добијамо један први интеграл

$$\ln(x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arctg} z = C_1.$$

Даље, из датог система имамо да је

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow y'_x = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}},$$

чиме смо добили хомогену диференцијалну једначину првог реда, коју решавамо сменом $y = wx$, одакле је $y' = w'x + w$ и

$$w'x + w = \frac{1+w}{1-w} \Rightarrow \frac{dw}{dx} x = \frac{1+w-w+w^2}{1-w}.$$

Сада имамо једначину у којој можемо да раздвојимо променљиве, па је даље:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(1-w)dw}{1+w^2} \Leftrightarrow \ln|x| + C = \arctg w - \frac{1}{2} \ln(1+w^2),$$

одакле заменом $w = y/x$ добијамо још један први интеграл система:

$$\ln(x^2 + y^2) - 2 \arctg \frac{y}{x} = C_2.$$

Ови први интеграли су независни и чине решење датог система јер, ако је $\varphi_1(x, y, t) = \ln(x^2 + y^2) - 2 \arctg z$ и $\varphi_2(x, y, t) = \ln(x^2 + y^2) - 2 \arctg \frac{y}{x}$, важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2x+2y}{x^2+y^2} & \frac{2y-2x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{-4}{x^2+y^2} \neq 0.$$

I колоквијум 2022/23 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = (6x + 8)e^{2x}.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2 + 1 - yt} = \frac{dy}{xt + xy} = \frac{dt}{xt}.$$

Решења:

1. Уколико поделимо једначину са x , добићемо

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{y}{x}\right),$$

па можемо препознати хомогену диференцијалну једначину. Након увођења смене $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$ и $y' = z'x + z$, имамо да је

$$z'x + z - z = (1 + z) \ln(1 + z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} \cdot x = (1 + z) \ln(1 + z),$$

па добијамо једначину у којој можемо раздвојити променљиве

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)},$$

одакле је

$$\ln |x| + C' = \int \frac{dz}{(1 + z) \ln(1 + z)} = \left[\begin{matrix} t = \ln(1 + z) \\ dt = \frac{dz}{1 + z} \end{matrix} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t|,$$

па даље добијамо да је $t = xC$, за $C = \pm e^{C'}$, односно након враћања смене, једноставно добијамо опште решење дате диференцијалне једначине:

$$\ln \frac{x + y}{x} = xC.$$

2. Опште решење одговарајуће хомогене једначине добијамо тако што најпре одредимо решења карактеристичне једначине:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$

одакле је $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, односно опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Из облика дате функције $f(x) = (6x + 8)e^{2x}$ видимо да $k = 1$ јер $2 + 0i$ једнострука нула карактеристичне једначине, те је облик партикуларног решења дат са:

$$y_p = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$\begin{aligned} y_p' &= (2Ax^2 + (2A + 2B)x + B) e^{2x}, \\ y_p'' &= (4Ax^2 + (8A + 4B)x + 2A + 4B) e^{2x}, \\ y_p''' &= (8Ax^2 + (24A + 8B)x + 12A + 12B) e^{2x}. \end{aligned}$$

Заменом y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у дату једначину, након сређивања добијамо да је

$$(6Ax + 8A + 3B) e^{2x} = (6x + 8) e^{2x},$$

па коефицијенте A и B добијамо из система

$$\left. \begin{aligned} 6A &= 6 \\ 8A + 3B &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = 1, B = 0.$$

Дакле, партикуларно решење је $y_p = x^2 e^{2x}$, па је, коначно, опште решење почетне диференцијалне једначине:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + x^2 e^{2x}.$$

3. Видимо најпре да из

$$\frac{dt}{xt} = \frac{x dx + y dy}{x(x^2 + 1 - yt) + y(xt + xy)} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x(x^2 + y^2 + 1)}$$

следи

$$2 \frac{dt}{t} = \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow 2 \int \frac{dt}{t} = \int \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow 2 \ln |t| + C = \ln(x^2 + y^2 + 1),$$

одакле добијамо један први интеграл

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{t^2} = C_1.$$

Даље, из датог система имамо да је

$$\frac{dy}{t + y} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{y + t}{t} \Leftrightarrow y_t' - \frac{y}{t} = 1,$$

чиме смо добили линеарну диференцијалну једначину првог реда, чије је решење

$$y = e^{\int \frac{1}{t} dt} \left(C + \int 1 \cdot e^{-\int \frac{1}{t} dt} dt \right) = t \left(C + \int \frac{1}{t} dt \right) = Ct + t \ln |t|,$$

одакле директно добијамо још један први интеграл система:

$$\frac{y}{t} - \ln |t| = C_2.$$

Ови први интегрални су независни и чине решење датог система јер, ако је $\varphi_1(x, y, t) = (x^2 + y^2 + 1)/t^2$ и $\varphi_2(x, y, t) = y/t - \ln |t|$, важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x/t^2 & 2y/t^2 \\ 0 & 1/t \end{vmatrix} = \frac{2x}{t^3} \neq 0.$$

I колоквијум 2023/24 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x' \cos y = x(\sin y + x \cos^4 y).$$

2. Дата је диференцијална једначина $y'' - 2y' + y = f(x)$.

а) Одредити опште решење једначине за $f(x) = 0$.

б) Одредити опште решење једначине за $f(x) = 12e^x(x^2 + x)$.

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{xz^2 - x^2} = \frac{dy}{xy - yz^2 - 2z^2} = \frac{dz}{xz}.$$

Решења:

1. Дата једначина је еквивалентна са

$$x' \cos y - x \sin y = x^2 \cos^4 y.$$

Дељењем једначине са $\cos y$ добијамо Бернулијеву диференцијалну једначину:

$$x' - x \operatorname{tg} y = x^2 \cos^3 y.$$

Ако уведемо смену $z = x^{-1}$ (провером видимо да је $x = 0$ решење дате једначине), одакле је $x = z^{-1}$ и $x' = -z^{-2}z'$ добијамо

$$-z^{-2}z' - z^{-1} \operatorname{tg} y = z^{-2} \cos^3 y,$$

односно, множењем једначине са $-z^2$, имамо линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$(1) \quad z' + z \operatorname{tg} y = -\cos^3 y.$$

Како је

$$\int \operatorname{tg} y \, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} \, dy = \left[\frac{t = \cos y,}{dt = -\sin y \, dy} \right] = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos y| + C,$$

то је решење једначине (1) дато са

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{\ln |\cos y|} \left(C - \int \cos^3 y \cdot e^{-\ln |\cos y|} \, dy \right) = \cos y \left(C - \int \cos^3 y \cdot \frac{1}{\cos y} \, dy \right) \\ &= \cos y \left(C - \int \cos^2 y \, dy \right) = \cos y \left(C - \int \frac{1 + \cos 2y}{2} \, dy \right) \\ &= \cos y \left(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right). \end{aligned}$$

Коначно, опште решење почетне диференцијалне једначине је

$$x(y) = \left(\cos y \left(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4} \right) \right)^{-1}.$$

2. а) На основу карактеристичне једначине

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0,$$

чија су решења $\lambda_{1,2} = 1$ добијамо опште решење дате хомогене једначине

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

б) Имајући у виду облик дате функције,

$$f(x) = e^x((12x^2 + 12x) \cos(0x) + 1 \sin(0x)),$$

видимо да је $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, па, како је $a + bi = 1$ двострука нула карактеристичног полинома, то партикуларно решење дате нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = x^2 e^x (Ax^2 + Bx + C) = e^x (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2).$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$y_p' = e^x (Ax^4 + (4A + B)x^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx),$$

односно

$$y_p'' = e^x (Ax^4 + (8A + B)x^3 + (12A + 6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C).$$

Уврштајући y_p , y_p' и y_p'' у дату једначину, добијамо да важи

$$e^x (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 12e^x (x^2 + x),$$

односно

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 12x^2 + 12x.$$

Поредећи коефицијенте уз чланове истог степена на обе стране добијамо да је $A = 1$, $B = 2$ и $C = 0$, односно партикуларно решење је

$$y_p = x^2 e^x (x^2 + 2x).$$

Опште решење дате нехомогене једначине је одатле

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x (x^2 + 2x).$$

3. Најпре, из

$$\frac{dx}{xz^2 - x^2} = \frac{dz}{xz},$$

добијамо да је

$$\frac{dx}{dz} = \frac{xz^2 - x^2}{xz} = z - \frac{x}{z},$$

одакле имамо линеарну диференцијалну једначину

$$x' + \frac{x}{z} = z,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{dz}{z}} \left(C + \int z e^{\int \frac{dz}{z}} dz \right) = e^{-\ln|z|} \left(C + \int z e^{\ln|z|} dz \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(C + \int z^2 dz \right) = \frac{1}{z} \left(C + \frac{z^3}{3} \right), \end{aligned}$$

одакле добијамо први интеграл

$$xz - \frac{z^3}{3} = C_1.$$

Даље, важи

$$\frac{y dx + x dy}{y(xz^2 - x^2) + x(xy - yz^2 - 2z^2)} = \frac{dz}{xz} \Leftrightarrow \frac{d(xy)}{-2xz^2} = \frac{dz}{xz},$$

одакле је

$$d(xy) = -2z dz.$$

Интеграљењем добијамо

$$xy = -z^2 + C_2,$$

односно још један први интеграл је

$$xy + z^2 = C_2.$$

Ако је $\varphi_1(x, y, z) = xz - \frac{z^3}{3}$ и $\varphi_2(x, y, z) = xy + z^2$, онда из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = xz \neq 0,$$

закључујемо да су ови први интеграли независни, те је њима одређено решење датог система.

I колоквијум 2024/25 - прва група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$\left(x - \frac{\cos^2 y}{x^2}\right) dx = \left(y + \frac{\sin 2y}{x}\right) dy$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(12x^2 + 10x).$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{2x^2 + 3xy + y^2} = \frac{dy}{x^2 + xy} = \frac{dz}{(x + y)yz}.$$

Решења:

1. Ако запишемо дату једначину као

$$\underbrace{\left(x - \frac{\cos^2 y}{x^2}\right) dx}_{P(x,y)} + \underbrace{\left(-y - \frac{\sin 2y}{x}\right) dy}_{Q(x,y)} = 0,$$

тада због

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = -\frac{2 \cos y (-\sin y)}{x^2} = \frac{\sin 2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

закључујемо да је дата једначина заправо једначина са тоталним диференцијалом. Из

$$\int P(x, y) dx = \int \left(x - \frac{\cos^2 y}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x}$$

следи

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int P(x, y) dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) \right] dy \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x} + \int \left[-y - \frac{\sin 2y}{x} + \frac{2 \cos x \sin x}{x} \right] dy \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x} - \frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

одакле је опште решење дате једначине дато са

$$\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x} = C.$$

2. На основу карактеристичне једначине $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$, одакле је $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$, добијамо решење нехомогене једначине која одговара полазној једначини:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Даље, на основу функције $f(x) = e^{-x}(12x^2 + 10x)$ добијамо да је партикуларно решење дато са

$$y_p = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C)x^1 = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx).$$

Диференцирањем даље добијамо да је

$$y'_p = e^{-x}(Ax^3 + (-3A + B)x^2 + (-2B + C)x - C),$$

односно

$$y''_p = e^{-x}(Ax^3 + (-6A + B)x^2 + (6A - 4B + C)x + 2B - 2C).$$

Заменом у једначину је одатле

$$e^{-x}(-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C) = e^{-x}(12x^2 + 10x),$$

па изједначавањем коефицијената добијамо систем

$$\left. \begin{array}{rcl} -12A & & = 12 \\ 6A & -8B & = 10 \\ 2B & -4C & = 0 \end{array} \right\},$$

одакле је $A = -1$, $B = -2$ и $C = -1$. Дакле, тражено партикуларно решење је

$$y_p = e^{-x}(-x^3 - 2x^2 - x),$$

односно опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - e^{-x}(x^3 + 2x^2 + x).$$

3. Приметимо прво да је $2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$, тако да је довољно да решимо систем

$$\frac{dx}{2x + y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{yz}.$$

Видимо да важи

$$\frac{dx}{2x + y} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2x + y}{y} = 1 + 2 \cdot \frac{x}{y},$$

односно добили смо хомогену диференцијалну једначину. Сменом $z = \frac{x}{y}$, односно $x = zy$ добијамо да је $x' = z'y + z$, па заменом у једначину је

$$z'y + z = 1 + 2z \Rightarrow z'y = 1 + z \Rightarrow \frac{dz}{1 + z} = \frac{dy}{y},$$

па интеграљењем обе стране добијамо да је

$$\ln|1 + z| = \ln|y| + C,$$

одакле је

$$1 + \frac{x}{y} = yC_1,$$

па је $\frac{x + y}{y^2} = C_1$ један први интеграл система.

Даље, из

$$\frac{dx - 2dy}{2x + y - 2x} = \frac{d(x - 2y)}{y} = \frac{dz}{yz} \Leftrightarrow d(x - 2y) = \frac{dz}{z}$$

интеграљењем добијамо $x - 2y = \ln|z| + C_2$, односно имамо први интеграл система

$$x - 2y - \ln|z| = C_2.$$

Добијена два прва интеграла су међусобно независна (један зависи, а други не зависи од z), па представљају решење система.

I колоквијум 2024/25 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(3x^2 - \operatorname{tg} y) \, dx = \frac{x}{\cos^2 y} \, dy$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y'' + y' + y = 5 \cos x + \sin x.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^2 + xy + y^2} = \frac{dy}{2x^2 + 3y^2} = \frac{dz}{yz}.$$

Решења:

1. Ако запишемо дату једначину као

$$\underbrace{(3x^2 - \operatorname{tg} y)}_{P(x,y)} \, dx + \underbrace{\left(-\frac{x}{\cos^2 y}\right)}_{Q(x,y)} \, dy = 0,$$

тада због

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = -\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

закључујемо да је дата једначина заправо једначина са тоталним диференцијалом. Из

$$\int P(x, y) \, dx = \int (3x^2 - \operatorname{tg} y) \, dx = x^3 - x \operatorname{tg} y$$

слиеди

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int P(x, y) \, dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) \, dx \right) \right] \, dy \\ &= x^3 - x \operatorname{tg} y + \int \left[-\frac{x}{\cos^2 y} + \frac{x}{\cos^2 y} \right] \, dy = x^3 - x \operatorname{tg} y, \end{aligned}$$

одакле је опште решење дате једначине дато са

$$x^3 - x \operatorname{tg} y = C.$$

2. На основу карактеристичне једначине $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$, одакле је $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$, добијамо решење нехомогене једначине која одговара полазној једначини:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Даље, на основу функције $f(x) = 5 \cos x + \sin x$ добијамо да је партикуларно решење дато са

$$y_p = (A \cos x + B \sin x)x^1.$$

Диференцирањем даље добијамо да је

$$\begin{aligned}y_p' &= (-Ax + B) \sin x + (Bx + A) \cos x, \\y_p'' &= (-Bx - 2A) \sin x + (-Ax + 2B) \cos x,\end{aligned}$$

односно

$$y_p''' = (Ax - 3B) \sin x + (-Bx - 3A) \cos x.$$

Заменом у једначину је одатле

$$(-2A - 2B) \sin x + (-2A + 2B) \cos x = \sin x + 5 \cos x,$$

па изједначавањем коефицијената добијамо систем

$$\left. \begin{aligned}-2A - 2B &= 1 \\ -2A + 2B &= 5\end{aligned} \right\},$$

одакле је $A = -\frac{3}{2}$ и $B = 1$ Дакле, тражено партикуларно решење је

$$y_p = x \left(-\frac{3}{2} \cos x + \sin x \right),$$

односно опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x \left(-\frac{3}{2} \cos x + \sin x \right).$$

3. Најпре, из

$$\frac{2dx - dy}{2(x^2 + xy + y^2) - 2x^2 - 3y^2} = \frac{d(2x - y)}{2xy - y^2} = \frac{dz}{yz} \Leftrightarrow \frac{d(2x - y)}{2x - y} = \frac{dz}{z}$$

интеграљењем добијамо

$$\ln |2x - y| = \ln z + C \Rightarrow 2x - y = zC_1$$

одакле добијамо један први интеграл система:

$$\frac{2x - y}{z} = C_1.$$

Даље, из

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2x^2 + 3y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3},$$

закључујемо да се ради о хомогеној једначини. Користећи смену $z = \frac{x}{y}$, одакле је $x = yz$ и $x' = yz' + z$, добијамо

$$yz' + z = \frac{z^2 + z + 1}{2z^2 + 3},$$

одакле је

$$yz' = \frac{z^2 + z + 1}{2z^2 + 3} - z = \frac{-2z^3 + z^2 - 2z + 1}{2z^2 + 3} = \frac{(1 - 2z)(z^2 + 1)}{2z^2 + 3}$$

односно

$$\frac{dy}{y} = \frac{2z^2 + 3}{(1 - 2z)(z^2 + 1)} dz.$$

Интегралењем добијамо да је

$$\begin{aligned}\ln |y| + C &= \int \frac{2z^2 + 3}{(1 - 2z)(z^2 + 1)} dz = \int \left(-\frac{14}{5(2z - 1)} + \frac{2z + 1}{5(z^2 + 1)} \right) dz \\&= -\frac{14}{5} \ln |2z - 1| + \frac{1}{5} \ln |z^2 + 1| + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} z \\&= -\frac{7}{5} \ln \left| \frac{2x - y}{y} \right| + \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x^2 + y^2}{y^2} \right| + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) \\&= -\frac{7}{5} \ln |2x - y| + \frac{1}{5} \ln |x^2 + y^2| + \ln |y| + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right),\end{aligned}$$

односно важи

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + \ln \left| \frac{x^2 + y^2}{(2x - y)^7} \right| = C_2,$$

што представља још један први интеграл система. Добијена два прва интеграла су међусобно независна (један зависи, а други не зависи од z), па представљају решење система.

I колоквијум 2025/26 - прва група

1. За диференцијалну једначину

$$(1 + 2x \cos y) dx + x \operatorname{tg} y dy = 0.$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''(y^2 - 1) = 2y(y')^2.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{-y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$$

Решења:

1. Наведено је да је интеграциони фактор у облику $\lambda(y)$, па да би добијена диференцијална једначина била једначина са тоталним диференцијалом, онда мора бити испуњено

$$((1 + 2x \cos y) \lambda(y))'_y = ((x \operatorname{tg} y) \lambda(y))'_x,$$

одакле је

$$\begin{aligned} & -2x \sin y \cdot \lambda(y) + (1 + 2x \cos y) \cdot \lambda'(y) = \operatorname{tg} y \cdot \lambda(y) \\ \Leftrightarrow & (1 + 2x \cos y) \cdot \lambda'(y) = (\operatorname{tg} y + 2x \sin y) \cdot \lambda(y) \\ \Leftrightarrow & \cancel{(1 + 2x \cos y)} \frac{d\lambda}{dy} = \operatorname{tg} y \cdot \cancel{(1 + 2x \cos y)} \lambda(y) \\ \Rightarrow & \frac{d\lambda}{\lambda} = \operatorname{tg} y dy. \end{aligned}$$

Интеграцијом даље добијамо да је

$$\ln |\lambda| = \int \operatorname{tg} y dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = -\ln |\cos y| + C_1 = \ln \left| \frac{1}{\cos y} \right| + C_1,$$

па за интеграциони фактор можемо узети партикуларно решење

$$\lambda(y) = \frac{1}{\cos y}.$$

Пошто је

$$\int P dx = \int (1 + 2x \cos y) \cdot \frac{1}{\cos y} dx = \int \left(\frac{1}{\cos y} + 2x \right) dx = \frac{x}{\cos y} + x^2 + C_1,$$

то је даље

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int P dx + \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] dy \\ &= \frac{x}{\cos y} + x^2 + \int \left[\frac{x \sin y}{\cos^2 y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\cos y} + x^2 \right) \right] dy \\ &= \frac{x}{\cos y} + x^2 + \int \left[\frac{x \sin y}{\cos^2 y} - \frac{x \sin y}{\cos^2 y} \right] dy = \frac{x}{\cos y} + x^2 + C_2. \end{aligned}$$

Дакле, опште решење полазне једначине је дато са

$$\frac{x}{\cos y} + x^2 = C.$$

2. Пошто се у самој једначини не појављује променљива x , увешћемо смену $z(y) = y'$, одакле је $y'' = z'_y \cdot z$. Тада је

$$z'_y \cdot z \cdot (y^2 - 1) = 2y \cdot z^2 \Rightarrow z'_y(y^2 - 1) = 2yz \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2y dy}{y^2 - 1}.$$

Интеграљењем обе стране једноставно добијамо да је

$$\ln |z| = \ln |y^2 - 1| + C,$$

односно

$$z = C_1(y^2 - 1).$$

Враћањем смене, даље је

$$y' = C_1(y^2 - 1) \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 1} = C_1 dx.$$

Још једним интеграљењем добијамо да је

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y - 1}{y + 1} \right| = C_1 x + C_2,$$

што представља опште решење дате једначине.

3. Видимо прво да је

$$\begin{aligned} \frac{x dx + y dy}{x^2(y^2 - z^2) - y^2(x^2 + z^2)} &= \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{-z^2(x^2 + y^2)} &= \frac{dz}{z(x^2 + y^2)} \\ \Leftrightarrow d(x^2 + y^2) &= -2z dz \quad \Bigg/ \int \end{aligned}$$

одакле следи да је $x^2 + y^2 = -z^2 + C_1$, те имамо један први интеграл,

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_1.$$

Даље, важи

$$\frac{\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy}{(y^2 - z^2) - (-(x^2 + z^2))} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)},$$

односно

$$\frac{d(\ln |x|) - d(\ln |y|)}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)},$$

одакле је

$$d\left(\ln \left| \frac{x}{y} \right| \right) = \frac{dz}{z}.$$

Сада добијамо да је $\ln |x/y| = \ln |z| + C$, односно имамо први интеграл

$$(3) \quad \frac{yz}{x} = C_2.$$

Јасно је да су први интеграл **(2)** и **(3)** независни, па представљају решење датог система.

I колоквијум 2025/26 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(x y' + 2 y) \cos^2 x = 2x\sqrt{y}.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^x (x^2 - x).$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}.$$

Решења:

1. Из једначине добијамо да је

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2}{\cos^2 x} \sqrt{y},$$

што је Бернулијева једначина за $\alpha = \frac{1}{2}$. Ако уведемо стандардну смену $z = y^{1/2}$ једноставно ћемо добити линеарну диференцијалну једначину

$$z' + \frac{1}{x} \cdot z = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Имајући у виду да је $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C_1$, имамо да је

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{x} \left(C + \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \right) = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ du = dx & v = \operatorname{tg} x \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{x} \left(C + x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + x \operatorname{tg} x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} (C + x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|) = \frac{C}{x} + \operatorname{tg} x + \frac{\ln |\cos x|}{x}. \end{aligned}$$

Сада је јасно да је опште решење полазне једначине дато са

$$\sqrt{y} = \frac{C}{x} + \operatorname{tg} x + \frac{\ln |\cos x|}{x}.$$

2. Одредимо најпре опште решење одговарајуће хомогене једначине $y'' - 3y' + 2y = 0$. Решења карактеристичне једначине $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, па је опште решење хомогеног дела дато са

(4)
$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Из функције $f(x) = 6e^x(x^2 - x)$ видимо да нас интересује вишеструкост броја $1+0i = 1$ као нуле карактеристичне једначине. Пошто је то једнострука нула, то ћемо партикуларно решење тражити у облику

$$y_p = x^1 e^x (Ax^2 + Bx + C) = (Ax^3 + Bx^2 + C)e^x.$$

Након двоструког диференцирања и груписања чланова добијамо да је

$$y'_p = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C)e^x,$$

односно

$$y''_p = (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + 2B + 2C)e^x.$$

Заменом y_p , y'_p и y''_p у дату једначину добијамо да је

$$(6x^2 - 6x)e^x = y''_p - 3y'_p + 2y_p = (-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C)e^x,$$

одакле имамо једноставан систем

$$\left. \begin{array}{rcl} -3A & = & 6 \\ 6A - 2B & = & -6 \\ 2B - C & = & 0 \end{array} \right\},$$

чије је решење $(A, B, C) = (-2, -3, -6)$. Даље следи да је партикуларно решење

$$(5) \quad y_p = (-2x^3 - 3x^2 - 6x)e^x,$$

па из (4) и (5) следи да је опште решење почетне нехомогене једначине

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - (2x^3 + 3x^2 + 6x)e^x.$$

3. Најпре, имамо да је испуњено

$$\frac{dy - dx}{y^2 - xy - xz + xy} = \frac{dz}{y^2 - xz},$$

односно

$$\frac{d(y - x)}{y^2 - xz} = \frac{dz}{y^2 - xz},$$

одакле следи

$$d(y - x) = dz.$$

Интеграцијом једноставно добијамо први интеграл:

$$(6) \quad y - x - z = C_1.$$

Даље, размотримо следећу комбинацију:

$$\frac{z dy - y dz}{(y^2 - xy)z - (y^2 - xz)y} = \frac{dx}{x(z - y)}.$$

Сређивањем имениоца добијамо

$$\frac{z dy - y dz}{y^2(z - y)} = \frac{dx}{x(z - y)},$$

што се после даљег сређивања записује као

$$-d\left(\frac{z}{y}\right) = d(\ln|x|).$$

Интеграцијом даље следи $-\frac{z}{y} = \ln|x| + C_2$, односно имамо још један први интеграл

$$(7) \quad \ln|x| + \frac{z}{y} = C_2.$$

Јасно је да су први интеграл [\(6\)](#) и [\(7\)](#) независни, па представљају решење датог система.