I **колоквијум 2022/23 - прва група**

1. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$2xy^3\,\mathrm{d}x - (1 - x^2y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

које задовољава услов $y(1) = 2$.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y'' - y' - y = (4x + 2)\cos x + 6\sin x.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x+y} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}.$$

Решења:

1. Из једначине видимо да важи

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1 - x^2y^2}{2xy^3} = \frac{1}{2y^3}x^{-1} - \frac{1}{2y}x \quad \Leftrightarrow \quad x' + \frac{1}{2y}x = \frac{1}{2y^3}x^{-1},$$

односно имамо Бернулијеву једначину за $\alpha = -1$. Ако уведемо смену $z = x^{1+1} = x^2$, одакле је $x = z^{1/2}$ и $x' = \frac{1}{2}z^{-1/2}z'$ добијамо

$$\frac{1}{2}z^{-1/2}z' + \frac{1}{2y}z^{1/2} = \frac{1}{2y^3}z^{-1/2} \quad \Big/ \cdot 2z^{1/2}$$
$$z' + \frac{1}{y}z = \frac{1}{y^3},$$

што представља линеарну диференцијалну једначину првог реда, чије је опште решење

$$z(y) = e^{-\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(C + \int \frac{1}{y^3}e^{\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{y}\left(C + \int \frac{1}{y^3}\cdot y\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{y}\left(C - \frac{1}{y}\right) = \frac{Cy - 1}{y^2}.$$

Дакле, опште решење почетне једначине је

$$x^2 = \frac{Cy - 1}{y^2},$$

одакле из датог почетног услова једноставно одређујемо и решење Кошијевог проблема:

$$1^2 = \frac{C\cdot 2 - 1}{2^2} \Rightarrow C = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{5y - 2}{2y^2}.$$

2. Опште решење одговарајуће хомогене једначине добијамо тако што најпре одредимо решења карактеристичне једначине:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = 0,$$

одакле је $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 1$, односно опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x.$$

Из облика дате функције $f(x) = (4x+2)\cos x + 6\sin x$ видимо да $k = 0$ јер $0 + 1\mathrm{i}$ није нула карактеристичне једначине, те је облик партикуларног решења дат са:

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$\begin{aligned}
y_p' &= (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x,\\
y_p'' &= (-Ax - B + 2C)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x,\\
y_p''' &= (-Cx - 3A - D)\cos x + (Ax + B - 3C)\sin x.
\end{aligned}$$

Заменом y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у дату једначину, након сређивања добијамо да је

$$\begin{aligned}
(4x+2)\cos x + 6\sin x = ((-2A - 2C)x - 4A - 2B + 2C - 2D)\cos x +\\
+ ((2A - 2C)x - 2A + 2B - 4C - 2D)\sin x,
\end{aligned}$$

па изједначавајући коефицијенте уз $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$ и $x\sin x$ на обе стране добијамо систем

$$\left.\begin{array}{c}
-4A - 2B + 2C - 2D = 2\\
-2A + 2B - 4C - 2D = 6\\
-2A - 2C = 4\\
2A - 2C = 0
\end{array}\right\}$$

чије је решење $A = -1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 0$. Дакле, партикуларно решење је $y_p = -x\cos x - x\sin x$, одакле добијамо опште решење почетне диференцијалне једначине:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^x - x\cos x - x\sin x.$$

3. Видимо најпре да из

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

следи

$$2\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad 2\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad 2\,\mathrm{arctg}\, z + C = \ln(x^2+y^2),$$

одакле добијамо један први интеграл

$$\ln(x^2+y^2) - 2\,\mathrm{arctg}\, z = C_1.$$

Даље, из датог система имамо да је

$$\frac{\mathrm{d}x}{x-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x+y} \quad\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{x-y} \quad\Leftrightarrow\quad y_x' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}},$$

чиме смо добили хомогену диференцијалну једначину првог реда, коју решавамо сменом $y = wx$, одакле је $y' = w'x + w$ и

$$w'x + w = \frac{1+w}{1-w} \quad\Rightarrow \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}x = \frac{1+w-w+w^2}{1-w}.$$

Сада имамо једначину у којој можемо да раздвојимо променљиве, па је даље:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{(1-w)\,\mathrm{d}w}{1+w^2} \quad \Leftrightarrow \ln|x| + C = \operatorname{arctg} w - \frac{1}{2}\ln(1+w^2),$$

одакле заменом $w = y/x$ добијамо још један први интеграл система:

$$\ln(x^2+y^2) - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_2.$$

Ови први интеграли су независни и чине решење датог система јер, ако је $\varphi_1(x,y,t) = \ln(x^2+y^2) - 2\operatorname{arctg} z$ и $\varphi_2(x,y,t) = \ln(x^2+y^2) - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ \frac{2x+2y}{x^2+y^2} & \frac{2y-2x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{-4}{x^2+y^2} \neq 0.$$

I колоквијум 2022/23 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = (6x+8)e^{2x}.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1-yt} = \frac{\mathrm{d}y}{xt+xy} = \frac{\mathrm{d}t}{xt}.$$

Решења:

1. Уколико поделимо једначину са x, добићемо

$$y' - \frac{y}{x} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right),$$

па можемо препознати хомогену диференцијалну једначину. Након увођења смене $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$ и $y' = z'x + z$, имамо да је

$$z'x + z - z = (1+z)\ln(1+z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot x = (1+z)\ln(1+z),$$

па добијамо једначину у којој можемо раздвојити променљиве

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{(1+z)\ln(1+z)} \quad \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int\frac{\mathrm{d}z}{(1+z)\ln(1+z)},$$

одакле је

$$\ln|x| + C' = \int\frac{\mathrm{d}z}{(1+z)\ln(1+z)} = \begin{bmatrix} t = \ln(1+z) \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}z}{1+z}\end{bmatrix} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|,$$

па даље добијамо да је $t = xC$, за $C = \pm e^{C'}$, односно након враћања смене, једоставно добијамо опште решење дате диференцијалне једначине:

$$\ln\frac{x+y}{x} = xC.$$

2. Опште решење одговарајуће хомогене једначине добијамо тако што најпре одредимо решења карактеристичне једначине:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0,$$

одакле је $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, односно опште решење хомогене једначине је

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}.$$

Из облика дате функције $f(x) = (6x+8)e^{2x}$ видимо да $k = 1$ јер $2 + 0\mathrm{i}$ једнострука нула карактеристичне једначине, те је облик партикуларног решења дат са:

$$y_p = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2+Bx)e^{2x}.$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$\begin{aligned} y_p' &= \left(2Ax^2 + (2A+2B)x + B\right)e^{2x},\\ y_p'' &= \left(4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A + 4B\right)e^{2x},\\ y_p''' &= \left(8Ax^2 + (24A+8B)x + 12A + 12B\right)e^{2x}. \end{aligned}$$

Заменом y_p, y_p', y_p'' и y_p''' у дату једначину, након сређивања добијамо да је

$$(6Ax + 8A + 3B)\,e^{2x} = (6x+8)e^{2x},$$

па коефицијенте A и B добијамо из система

$$\left.\begin{aligned} 6A &= 6\\ 8A+3B &= 8 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad A = 1, B = 0.$$

Дакле, партикуларно решење је $y_p = x^2e^{2x}$, па је, коначно, опште решење почетне диференцијалне једначине:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + x^2 e^{2x}.$$

3. Видимо најпре да из

$$\frac{\mathrm{d}t}{xt} = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x(x^2+1-yt)+y(xt+xy)} = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x(x^2+y^2+1)}$$

следи

$$2\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1} \quad\Rightarrow\quad 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1} \quad\Rightarrow\quad 2\ln|t| + C = \ln(x^2+y^2+1),$$

одакле добијамо један први интеграл

$$\frac{x^2+y^2+1}{t^2} = C_1.$$

Даље, из датог система имамо да је

$$\frac{\mathrm{d}y}{t+y} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y+t}{t} \quad\Leftrightarrow\quad y_t' - \frac{y}{t} = 1,$$

чиме смо добили линеарну диференцијалну једначину првог реда, чије је решење

$$y = e^{\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}\left(C + \int 1\cdot e^{-\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right) = t\left(C + \int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = Ct + t\ln|t|,$$

одакле директно добијамо још један први интеграл система:

$$\frac{y}{t} - \ln|t| = C_2.$$

Ови први интеграли су независни и чине решење датог система јер, ако је $\varphi_1(x,y,t) = (x^2+y^2+1)/t^2$ и $\varphi_2(x,y,t) = y/t - \ln|t|$, важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)_x' & (\varphi_1)_y' \\ (\varphi_2)_x' & (\varphi_2)_y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x/t^2 & 2y/t^2 \\ 0 & 1/t \end{vmatrix} = \frac{2x}{t^3} \neq 0.$$

I колоквијум 2023/24 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x' \cos y = x(\sin y + x \cos^4 y).$$

2. Дата је диференцијална једначина $y'' - 2y' + y = f(x)$.

а) Одредити опште решење једначине за $f(x) = 0$.

б) Одредити опште решење једначине за $f(x) = 12e^x(x^2 + x)$.

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz^2 - x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{xy - yz^2 - 2z^2} = \frac{\mathrm{d}z}{xz}.$$

Решења:

1. Дата једначина је еквивалентна са

$$x' \cos y - x \sin y = x^2 \cos^4 y.$$

Дељењем једначине са $\cos y$ добијамо Бернулијеву диференцијалну једначину:

$$x' - x \operatorname{tg} y = x^2 \cos^3 y.$$

Ако уведемо смену $z = x^{-1}$ (провером видимо да је $x = 0$ решење дате једначине), одакле је $x = z^{-1}$ и $x' = -z^{-2}z'$ добијамо

$$-z^{-2}z' - z^{-1} \operatorname{tg} y = z^{-2} \cos^3 y,$$

односно, множењем једначине са $-z^2$, имамо линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$z' + z \operatorname{tg} y = -\cos^3 y. \tag{1}$$

Како је

$$\int \operatorname{tg} y \, \mathrm{d}y = \int \frac{\sin y}{\cos y} \, \mathrm{d}y = \left[\begin{array}{c} t = \cos y, \\ \mathrm{d}t = -\sin y \, \mathrm{d}y \end{array} \right] = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos y| + C,$$

то је решење једначине (1) дато са

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{\ln|\cos y|}\Big(C - \int \cos^3 y \cdot e^{-\ln|\cos y|} \, \mathrm{d}y\Big) = \cos y \Big(C - \int \cos^3 y \cdot \frac{1}{\cos y} \, \mathrm{d}y\Big) \\ &= \cos y \Big(C - \int \cos^2 y \, \mathrm{d}y\Big) = \cos y \Big(C - \int \frac{1 + \cos 2y}{2} \, \mathrm{d}y\Big) \\ &= \cos y \Big(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\Big). \end{aligned}$$

Коначно, опште решење почетне диференцијалне једначине је

$$x(y) = \left(\cos y\left(C - \frac{y}{2} - \frac{\sin 2y}{4}\right)\right)^{-1}.$$

2. **а)** На основу карактеристичне једначине

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0,$$

чија су решења $\lambda_{1,2} = 1$ добијамо опште решење дате хомогене једначине

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

б) Имајући у виду облик дате функције,

$$f(x) = e^x((12x^2 + 12x)\cos(0x) + 1\sin(0x)),$$

видимо да је $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, па, како је $a + bi = 1$ двострука нула карактеристичног полинома, то партикуларно решење дате нехомогене једначине тражимо у облику

$$y_p = x^2 e^x (Ax^2 + Bx + C) = e^x(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2).$$

Након краћег рачуна добијамо да је

$$y_p' = e^x\big(Ax^4 + (4A + B)x^3 + (3B + C)x^2 + 2Cx\big),$$

односно

$$y_p'' = e^x\big(Ax^4 + (8A + B)x^3 + (12A + 6B + C)x^2 + (6B + 4C)x + 2C\big).$$

Уврштајући y_p, y_p' и y_p'' у дату једначину, добијамо да важи

$$e^x\big(12Ax^2 + 6Bx + 2C\big) = 12e^x\big(x^2 + x\big),$$

односно

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 12x^2 + 12x.$$

Поредећи коефицијенте уз чланове истог степена на обе стране добијамо да је $A = 1$, $B = 2$ и $C = 0$, односно партикуларно решење је

$$y_p = x^2 e^x (x^2 + 2x).$$

Опште решење дате нехомогене једначине је одатле

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x (x^2 + 2x).$$

3. Најпре, из

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz^2 - x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{xz},$$

добијамо да је

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{xz^2 - x^2}{xz} = z - \frac{x}{z},$$

одакле имамо линеарну диференцијалну једначину

$$x' + \frac{x}{z} = z,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{\mathrm{d}z}{z}} \left(C + \int z e^{\int \frac{\mathrm{d}z}{z}} \,\mathrm{d}z \right) = e^{-\ln|z|} \left(C + \int z e^{\ln|z|} \,\mathrm{d}z \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(C + \int z^2 \,\mathrm{d}z \right) = \frac{1}{z} \left(C + \frac{z^3}{3} \right), \end{aligned}$$

одакле добијамо први интеграл

$$xz - \frac{z^3}{3} = C_1.$$

Даље, важи

$$\frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{y(xz^2 - x^2) + x(xy - yz^2 - 2z^2)} = \frac{\mathrm{d}z}{xz} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(xy)}{-2xz^2} = \frac{\mathrm{d}z}{xz},$$

одакле је

$$\mathrm{d}(xy) = -2z\,\mathrm{d}z.$$

Интеграљењем добијамо

$$xy = -z^2 + C_2,$$

односно још један први интеграл је

$$xy + z^2 = C_2.$$

Ако је $\varphi_1(x, y, z) = xz - \dfrac{z^3}{3}$ и $\varphi_2(x, y, z) = xy + z^2$, онда из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = xz \neq 0,$$

закључујемо да су ови први интеграли независни, те је њима одређено решење датог система.

$\boxed{\text{I \textbf{колоквијум 2024/25 - прва група}}}$

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$\left(x - \frac{\cos^2 y}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left(y + \frac{\sin 2y}{x}\right) \mathrm{d}y$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(12x^2 + 10x).$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + 3xy + y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2 + xy} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)yz}.$$

Решења:

1. Ако запишемо дату једначину као

$$\underbrace{\left(x - \frac{\cos^2 y}{x^2}\right)}_{P(x,y)} \mathrm{d}x + \underbrace{\left(-y - \frac{\sin 2y}{x}\right)}_{Q(x,y)} \mathrm{d}y = 0,$$

тада због

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = -\frac{2\cos y(-\sin y)}{x^2} = \frac{\sin 2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)$$

закључујемо да је дата једначина заправо једначина са тоталним диференцијалом. Из

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \left(x - \frac{\cos^2 y}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x}$$

следи

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right] \mathrm{d}y \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x} + \int \left[-y - \frac{\sin 2y}{x} + \frac{2\cos x \sin x}{x}\right] \mathrm{d}y \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x} - \frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

одакле је опште решење дате једначине дато са

$$\frac{x^2 - y^2}{2} + \frac{\cos^2 y}{x} = C.$$

2. На основу карактеристичне једначине $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$, одакле је $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$, добијамо решење нехомогене једначине која одговара полазној једначини:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Даље, на основу функције $f(x) = e^{-x}(12x^2 + 10x)$ добијамо да је партикуларно решење дато са

$$y_p = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C)x^1 = e^{-x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx).$$

Диференцирањем даље добијамо да је

$$y_p' = e^{-x}\big(Ax^3 + (-3A + B)\,x^2 + (-2\,B + C)\,x - C\big),$$

односно

$$y_p'' = e^{-x}\big(Ax^3 + (-6A + B)\,x^2 + (6\,A - 4B + C)\,x + 2B - 2C\big).$$

Заменом у једначину је одатле

$$e^{-x}(-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C) = e^{-x}(12x^2 + 10x),$$

па изједначавањем коефицијената добијамо систем

$$\left.\begin{array}{rrrl} -12A & & & = 12 \\ 6A & -8B & & = 10 \\ & 2B & -4C & = \ 0 \end{array}\right\},$$

одакле је $A = -1$, $B = -2$ и $C = -1$. Дакле, тражено партикуларно решење је

$$y_p = e^{-x}\big(-x^3 - 2x^2 - x\big),$$

односно опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - e^{-x}\big(x^3 + 2x^2 + x\big).$$

3. Приметимо прво да је $2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$, тако да је довољно да решимо систем

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x + y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{yz}.$$

Видимо да важи

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x + y} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \ \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2x + y}{y} = 1 + 2 \cdot \frac{x}{y},$$

односно добили смо хомогену диференцијалну једначину. Сменом $z = \dfrac{x}{y}$, односно $x = zy$ добијамо да је $x' = z'y + z$, па заменом у једначину је

$$z'y + z = 1 + 2z \ \Rightarrow\ z'y = 1 + z \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}z}{1 + z} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

па интеграљењем обе стране добијамо да је

$$\ln|1 + z| = \ln|y| + C,$$

одакле је

$$1 + \frac{x}{y} = yC_1,$$

па је $\dfrac{x + y}{y^2} = C_1$ један први интеграл система.

Даље, из

$$\frac{\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}y}{2x + y - 2x} = \frac{\mathrm{d}(x - 2y)}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{yz} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{d}(x - 2y) = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

интеграљењем добијамо $x - 2y = \ln|z| + C_2$, односно имамо први интеграл система

$$x - 2y - \ln|z| = C_2.$$

Добијена два прва интеграла су међусобно независна (један зависи, а други не зависи од z), па представљају решење система.

I колоквијум 2024/25 - друга група

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$\left(3x^2 - \operatorname{tg} y\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$$

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y'' + y' + y = 5\cos x + \sin x.$$

3. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2 + xy + y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{2x^2 + 3y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{yz}.$$

Решења:

1. Ако запишемо дату једначину као

$$\underbrace{\left(3x^2 - \operatorname{tg} y\right)}_{P(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\left(-\frac{x}{\cos^2 y}\right)}_{Q(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0,$$

тада због

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = -\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

закључујемо да је дата једначина заправо једначина са тоталним диференцијалом. Из

$$\int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (3x^2 - \operatorname{tg} y)\,\mathrm{d}x = x^3 - x\operatorname{tg} y$$

следи

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right]\,\mathrm{d}y \\ &= x^3 - x\operatorname{tg} y + \int \left[-\frac{x}{\cos^2 y} + \frac{x}{\cos^2 y}\right]\,\mathrm{d}y = x^3 - x\operatorname{tg} y, \end{aligned}$$

одакле је опште решење дате једначине дато са

$$x^3 - x\operatorname{tg} y = C.$$

2. На основу карактеристичне једначине $\lambda^3 - +\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda^2+1) = 0$, одакле је $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$, добијамо решење нехомогене једначине која одговара полазној једначини:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Даље, на основу функције $f(x) = 5\cos x + \sin x$ добијамо да је партикуларно решење дато са

$$y_p = (A\cos x + B\sin x)x^1.$$

Диференцирањем даље добијамо да је

$$y_p' = (-Ax + B)\sin x + (Bx + A)\cos x,$$
$$y_p'' = (-Bx - 2A)\sin x + (-Ax + 2B)\cos x,$$

односно

$$y_p''' = (Ax - 3B)\sin x + (-Bx - 3A)\cos x.$$

Заменом у једначину је одатле

$$(-2A - 2B)\sin x + (-2A + 2B)\cos x = \sin x + 5\cos x,$$

па изједначавањем коефицијената добијамо систем

$$\left.\begin{array}{rrl} -2A & -2B & = 1 \\ -2A & +2B & = 5 \end{array}\right\},$$

одакле је $A = -\dfrac{3}{2}$ и $B = 1$ Дакле, тражено партикуларно решење је

$$y_p = x\left(-\frac{3}{2}\cos x + \sin x\right),$$

односно опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x\left(-\frac{3}{2}\cos x + \sin x\right).$$

3. Најпре, из

$$\frac{2\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y}{2(x^2 + xy + y^2) - 2x^2 - 3y^2} = \frac{\mathrm{d}(2x - y)}{2xy - y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{yz} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}(2x - y)}{2x - y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

интеграљењем добијамо

$$\ln|2x - y| = \ln z + C \quad\Rightarrow\quad 2x - y = zC_1$$

одакле добијамо један први интеграл система:

$$\frac{2x - y}{z} = C_1.$$

Даље, из

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2x^2 + 3y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3},$$

закључујемо да се ради о хомогеној једначини. Користећи смену $z = \dfrac{x}{y}$, одакле је $x = yz$ и $x' = yz' + z$, добијамо

$$yz' + z = \frac{z^2 + z + 1}{2z^2 + 3},$$

одакле је

$$yz' = \frac{z^2 + z + 1}{2z^2 + 3} - z = \frac{-2z^3 + z^2 - 2z + 1}{2z^2 + 3} = \frac{(1 - 2z)(z^2 + 1)}{2z^2 + 3}$$

односно

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2z^2+3}{(1-2z)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z.$$

Интеграљењем добијамо да је

$$\begin{aligned}
\ln|y| + C &= \int \frac{2z^2+3}{(1-2z)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = \int \left(-\frac{14}{5(2z-1)} + \frac{2z+1}{5(z^2+1)}\right)\mathrm{d}z \\
&= -\frac{14}{5}\ln|2z-1| + \frac{1}{5}\ln|z^2+1| + \frac{1}{5}\operatorname{arctg} z \\
&= -\frac{7}{5}\ln\left|\frac{2x-y}{y}\right| + \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^2+y^2}{y^2}\right| + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \\
&= -\frac{7}{5}\ln|2x-y| + \frac{1}{5}\ln|x^2+y^2| + \ln|y| + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),
\end{aligned}$$

односно важи

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left|\frac{x^2+y^2}{(2x-y)^7}\right| = C_2,$$

што представља још један први интеграл система. Добијена два прва интеграла су међусобно независна (један зависи, а други не зависи од z), па представљају решење система.