

Диференцијалне једначине првог реда

Опште и сингуларно решење

У наставку ће нам $y = y(x)$ представљати реалну функцију реалне променљиве x , и њене изводе (до n -тог реда) ћемо стандардно означавати: $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, ..., $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$.

Једначину облика

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

називамо **диференцијалном једначином** n -тог реда, а њено **опште** решење тражимо у облику

$$\varphi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

где су $C_1, \dots, C_n$ неке реалне константе. За конкретне вредности тих константи добијамо неко од **партикуларних** решења дате једначине. Уколико имамо решење диференцијалне једначине које се не може добити из општег решења ни за један избор константи $C_1, \dots, C_n$, тада такво решење називамо *сингуларним*.

За $n = 1$ имамо диференцијалну једначину првог реда $F(x, y, y') = 0$ и њено решење ће бити облика $\varphi(x, y, C) = 0$. Некад је могуће (и згодно) да се диференцијална једначина напише у облику $y' = f(x, y)$, као и њено решење у експлицитном облику $y = \psi(x, C)$.

Примери: Опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = 0$ је дато са $y = C$, $C = \text{const}$. Нека партикуларна решења те једначине су $y = 1$, $y = \sqrt{2}$, $y = e$ итд.

Опште решење диференцијалне једначине $y' = 5$ је $y = 5x + C$, $C = \text{const}$, а нека партикуларна решења су $y = 5x + 1$, $y = 5x + \pi$...

1. Доказати да је $y = 2Cx + C^2$ опште решење диференцијалне једначине $(y')^2 + 4xy' = 4y$.

Решење. Покажимо да $y = 2Cx + C^2$ заиста задовољава дату диференцијалну једначину: Како је $y' = 2C$, то важи

$$(y')^2 + 4xy' = (2C)^2 + 4x(2C) = 4C^2 + 8xC = 4(2Cx + C^2) = 4y.$$

По дефиницији, то јесте опште решење јер садржи једну константу и задовољава саму једначину. $\square$

2. Доказати да је $x^2 = C(y - C)$, $C \neq 0$, опште решење диференцијалне једначине $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0$. Показати да су $y = 2x$ и $y = -2x$ сингуларна решења те једначине.

Решење. Из $x^2 = C(y - C)$ и $C \neq 0$ добијамо да је $y = \frac{x^2}{C} + C$, одакле је $y' = \frac{2x}{C}$, па заменом y и y' у дату једначину добијамо да важи

$$\begin{aligned} x(y')^2 - 2yy' + 4x &= x\left(\frac{2x}{C}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{C} + C\right)\frac{2x}{C} + 4x \\ &= \frac{4x^3}{C^2} - \frac{4x^3}{C^2} - 4x + 4x = 0, \end{aligned}$$

те је са $x^2 = C(y - C)$ заиста дато опште решење дате диференцијалне једначине.

Даље, ако је $y = 2x$, тада важи $y' = 2$, па је испуњено

$$x(y')^2 - 2yy' + 4x = x(2)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2 + 4x = 0,$$

односно и $y = 2x$ је решење дате диференцијалне једначине, међутим оно је сингуларно. Наиме, не постоји вредност константе C , тако да је $\frac{x^2}{C} + C = 2x$, јер се ради о полиномима различитог степена. Аналогно се резонује и за $y = -2x$. $\square$

Користећи запис извода преко диференцијала, $y' = \frac{dy}{dx}$, диференцијална једначина првог реда $F(x, y, y') = 0$ се некад може записати и у облику

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

3. Доказати да је $\ln x \cdot \ln y = C$ опште решење диференцијалне једначине $y \ln y dx + x \ln x dy = 0$, и одредити партикуларно решење за које важи $y(e) = e$.

Решење. Видимо да је

$$y \ln y dx + x \ln x dy = xy \left(\frac{1}{x} \ln y dx + \frac{1}{y} \ln x dy \right) = xy d(\ln x \cdot \ln y),$$

па закључујемо да важи $d(\ln x \cdot \ln y) = 0$, одакле следи да је $\ln x \cdot \ln y = C$ заиста опште решење дате једначине.

Ако заменимо услов $y(e) = e$, односно $x = e$ и $y = e$ у дату једначину, добићемо да је испуњено $\ln e \cdot \ln e = C$, односно $C = 1$. Дакле, тражено партикуларно решење је $\ln x \cdot \ln y = 1$. $\square$

Једначине са раздвојеним променљивим

Диференцијалну једначину $y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$, $g(y) \neq 0$, називамо *једначином са раздвојеним променљивим*. Решавамо је тако што интегралимо обе стране последње једнакости:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \Rightarrow \dots \Rightarrow G(y) + C_1 = F(x) + C_2,$$

односно опште решење је дато у облику $G(y) - F(x) = C$, где је $C = C_1 - C_2 = \text{const}$, и где су G и F примитивне функције функција g и f , редом.

4. Решити диференцијалну једначину $(1 + e^x)yy' = e^x$.

Решење. Раздвајањем променљивих у једначини $(1 + e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x$ добијамо једначину

$$y dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Ако интегралимо леву и десну страну добићемо

$$\frac{y^2}{2} = \int y \, dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx = \left[t = 1 + e^x \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(1 + e^x) + C,$$

па директно добијамо да је опште решење дате диференцијалне једначине $y^2 = 2 \ln(1 + e^x) + C_1$, где је $C_1 = 2C$. $\square$

5. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $2y' = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ које задовољава услов $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решење. Одредимо најпре опште решење: Користећи познати тригонометријски идентитет за разлику косинуса добијамо да важи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} = \frac{-2 \sin \frac{x-y+x+y}{2} \sin \frac{x-y-x-y}{2}}{2} = \sin x \sin y,$$

одакле, раздвајањем променљивих добијамо једначину

$$\frac{dy}{\sin y} = \sin x \, dx.$$

Интеграљењем обе стране имамо да важи

$$-\cos x + C = \int \sin x \, dx = \int \frac{dy}{\sin y} = \left[t = \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right] = \int \frac{\frac{2 \, dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t|,$$

односно опште решење гласи:

$$(1) \quad \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C.$$

Заменом $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ у (1), добијамо да је $C = \cos 0 + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right| = 1$, те је тражено партикуларно решење: $\cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = 1$. $\square$

Хомогене диференцијалне једначине

Једначину облика $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ називамо *хомогеном диференцијалном једначином првог реда*. Такву једначину решавамо сменом $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$, односно $y' = z'x + z$.

6. Решити диференцијалну једначину $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$.

Решење. Ако уведемо смену $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y = zx$ и $y' = z'x + z$, добијамо да је дата диференцијална једначина еквивалентна једначини $z'x + z = e^z + z + 1$, односно $\frac{dz}{dx} \cdot x = e^z + 1$. Након раздвајања променљивих и интеграљења имамо

$$\ln |x| = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{e^z + 1} = \left[\frac{t = e^z}{\frac{dt}{t} = dz} \right] = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln |t| - \ln |t+1| + C,$$

одакле је

$$C = \ln |x| + \ln |t+1| - \ln |t| = \ln \left| \frac{x(t+1)}{t} \right| = \ln \left| \frac{x(e^{\frac{y}{x}} + 1)}{e^{\frac{y}{x}}} \right|,$$

одакле је опште решење $C_1 e^{\frac{y}{x}} = x(e^{\frac{y}{x}} + 1)$, где је $C_1 = e^C$. $\square$

7. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ које задовољава услов $y(1) = 0$.

Решење. Нађимо прво опште решење дате диференцијалне једначине. Ако поделимо обе стране са x добићемо наредну хомогену диференцијалну једначину:

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 1.$$

Ако уведемо смену $z = \frac{y}{x}$, одакле је $y' = z'x + z$, добићемо једначину $z'x \operatorname{arctg} z = 1$, па раздвајањем променљивих добијамо $\int \operatorname{arctg} z \, dz = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$. Применом парцијалне интеграције, за $u = \operatorname{arctg} z$ и $dv = dz$, односно $du = \frac{dz}{z^2+1}$ и $v = z$, добијамо:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} z \, dz &= z \operatorname{arctg} z - \int \frac{z \, dz}{z^2 + 1} = \left[t = z^2 + 1 \right] \\ &= z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln |t| \\ &= \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \\ &= \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} (\ln(x^2 + y^2) - 2 \ln |x|) \\ &= \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} (\ln(x^2 + y^2)) + \ln |x|, \end{aligned}$$

одакле добијамо да је опште решење дате једначине

$$(2) \quad \frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} (\ln(x^2 + y^2)) = C.$$

Ако заменимо $x = 1$ и $y = 0$ у (2), добићемо $C = 0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2} (\ln(0^2 + 1^2)) = 0$, те је тражено партикуларно решење $\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + y^2))$. $\square$

8. Одговарајућом сменом свести једначину $y' = \frac{x+y-3}{x-y-1}$ на хомогену, а затим је решити.

Решење. Уколико не бисмо имали -3 и -1 у бројиоцу, односно имениоцу, тада бисмо једноставно добили хомоген облик дате једначине. Применићемо један трик тако да изгубимо те бројеве. Уведемо смену $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$ за погодно изабране α и β :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} = \frac{x_1 + \alpha + y_1 + \beta - 3}{x_1 + \alpha - y_1 - \beta - 1} = \frac{x_1 + y_1 + \alpha + \beta - 3}{x_1 - y_1 + \alpha - \beta - 1}.$$

Мотивација нам је да изаберемо α и β тако да важи $\alpha + \beta = 3$ и $\alpha - \beta = 1$. Једноставно добијамо да је $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Сада решавамо једначину

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} = \frac{1 + \frac{y_1}{x_1}}{1 - \frac{y_1}{x_1}} \stackrel{z = \frac{y_1}{x_1}}{\Leftrightarrow} z'x_1 + z = \frac{1+z}{1-z},$$

одакле је

$$\frac{dz}{dx_1} x_1 = \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{z^2+1}{1-z},$$

па раздвајањем променљивих добијамо

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{x_1} &= \frac{(1-z) dz}{z^2+1} \\ \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} &= \int \frac{(1-z) dz}{z^2+1} = \int \frac{dz}{z^2+1} - \frac{z dz}{z^2+1} = \arctg z - \frac{1}{2} \ln(z^2+1), \end{aligned}$$

односно враћањем смена $x_1 = x - 2$ и $z = \frac{y-1}{x-2}$:

$$\ln|x-2| + C = \arctg \frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{y-1}{x-2} \right)^2 + 1 \right).$$

Након мало сређивања добијамо опште решење у облику

$$2 \arctg \frac{y-1}{x-2} = \ln((x-2)^2 + (y-1)^2) + C.$$

□

Напомена: Идеја из прошлог задатка не мора увек да „упали” јер може да се деси да не постоје тражени α и β , односно систем који се добије нема решења. Тада се задатак може решити преко одговарајуће смене $z = z(x, y)$:

Пример: Диференцијалну једначину $(x+y+1) dx + (2x+2y-1) dy = 0$ можемо свести на облик $y' = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$, и да уведемо смену $z = x+y$, одакле добијамо једначину $z' - 1 = -\frac{z+1}{2z-1}$, коју даље решавамо познатим методама.

Неки типови диференцијалних једначина првог реда

Линеарна диференцијална једначина првог реда

Једна од најосновнијих диференцијалних једначина коју ћемо разматрати је облика

$$(3) \quad y' + p(x)y = q(x).$$

Претпоставимо да је $P(x)$ функција таква да важи $P'(x) = p(x)$. Ако помножимо обе стране једначине (3) са $e^{P(x)}$ имаћемо

$$e^{P(x)} y' + e^{P(x)} P'(x) y = q(x) e^{P(x)},$$

односно

$$\left(e^{P(x)} y \right)' = q(x) e^{P(x)},$$

одакле имамо да је

$$e^{P(x)} y = \int q(x) e^{P(x)} dx + C,$$

односно

$$y = e^{-P(x)} \left(C + \int q(x) e^{P(x)} dx \right).$$

Ако узмемо да је $P(x) = \int p(x) dx$, добићемо да је решење посматране једначине облика

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right).$$

Да ли би се резултат разликовао за неки други избор функције $P(x)$?

1. Решити диференцијалну једначину $y' + \frac{y}{x} = 3x$.

Решење. У овом примеру је $p(x) = \frac{1}{x}$ и $q(x) = 3x$. Примењујући формулу коју смо извели за опште решење линеарне диференцијалне једначине првог реда, добијамо:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int 3xe^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = e^{-\ln|x|} \left(C + 3 \int xe^{\ln|x|} dx \right) \\ &= \frac{1}{|x|} \left(C + 3 \int x|x| dx \right) = \begin{cases} \frac{1}{x} (C + 3 \int x^2 dx) = \frac{1}{x} \left(C + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) = \frac{C}{x} + x^2, & x > 0, \\ -\frac{1}{x} (C - 3 \int x^2 dx) = -\frac{1}{x} \left(C - 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) = -\frac{C}{x} + x^2, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Видимо да, пошто је C произвољна константа, да је опште решење облика $y(x) = \frac{C}{x} + x^2$, независно од знака x код апсолутне вредности, те ћемо убудуће у оваквим случајевима радити само као да је ту у питању знак плус.

2. *Решење:* Ово решење ће користити нешто општију методу, методу неодређених функција. Идеја методе је да тражимо непознату функцију $y(x)$ у облику $u(x)v(x)$, где су u и v погодно изабране функције. За почетак, заменом $y' = u'v + uv'$ у једначину добијамо да важи

$$(4) \quad u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 3x \Leftrightarrow u'v + \left(v' + \frac{1}{x}v\right)u = 3x.$$

Пошто ми имамо слободу у бирању функција, захтеваћемо да члан уз u буде једнак нули:

$$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Leftrightarrow -\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int -\frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|v| = \ln|x| \Rightarrow |v| = |x|^{-1}.$$

Узећемо да је $v = 1/x$, па ћемо заменом у (4) даље добити да је

$$u' \frac{1}{x} + 0 \cdot u = 3x \Leftrightarrow u' = 3x^2,$$

одакле директно добијамо да је $u = x^3 + C$. Коначно, решење почтетне једначине је

$$y(x) = u(x)v(x) = (x^3 + C) \frac{1}{x} = x^2 + \frac{C}{x}.$$

□

2. Решити диференцијалну једначину $y' = \frac{y}{\ln y + x - 1}$.

Решење. Јасно је да ова једначина није линеарна кад је посматрамо као једначину по функцији $y = y(x)$. Ипак, имамо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y + x - 1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\ln y + x - 1}{y} \Leftrightarrow x'(y) - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y - 1}{y},$$

односно дата једначина је линеарна уколико је посматрамо као једначину по $x = x(y)$. Сада је:

$$\begin{aligned} x(y) &= e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(C + \int \frac{\ln y - 1}{y} e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy \right) = y \left(C + \int \frac{\ln y - 1}{y^2} dy \right) \\ &= y \left(C - \frac{\ln y - 1}{y} + \int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} dy \right) = y \left(C - \frac{\ln y - 1}{y} - \frac{1}{y} \right) = Cy - \ln y. \end{aligned}$$

□

3. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$ за које важи гранични услов $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.

Решење. Најпре, дељењем једначине са $\sin x$ добијамо линеарну диференцијалну једначину:

$$y' - y \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin x}{x^2}.$$

Пошто је

$$\int \left(-\frac{\cos x}{\sin x} \right) dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln |\sin x| = \ln |\sin x|^{-1},$$

то имамо да је опште решење:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\ln |\sin x|} \left(C + \int \left(-\frac{\sin x}{x^2} \right) e^{\ln |\sin x|^{-1}} dx \right) = \sin x \left(C + \int \frac{-\sin x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sin x} dx \right) \\ &= \sin x \left(C + \int \frac{-1}{x^2} dx \right) = \sin x \left(C + \frac{1}{x} \right) = C \sin x + \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Ако искористимо сада дати услов, имаћемо:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(C \sin x + \frac{\sin x}{x} \right),$$

па како $\sin x$ не конвергира за $x \rightarrow \infty$, јасно је да мора бити $C = 0$. Дакле, тражено партикуларно решење је $y(x) = \frac{\sin x}{x}$. □

Бернулијева диференцијална једначина

Разматраћемо диференцијалну једначину следећег типа:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha,$$

где је $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Видимо да се у случају да је $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ ради о линеарног диференцијалној једначини првог реда, те нам стога ти случајеви нису интересантни.

Саму једначину ћемо решавати тако што најпре уведемо смену $z = y^{1-\alpha}$. Видимо да је тада

$$z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y',$$

одакле је

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x)y^\alpha \quad \bigg/ \cdot (1 - \alpha)y^{-\alpha} \\ \Rightarrow (1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)p(x)y^{1-\alpha} &= (1 - \alpha)q(x) \\ \Leftrightarrow z' + (1 - \alpha)p(x)z &= (1 - \alpha)q(x), \end{aligned}$$

односно свели смо дату диференцијалну једначину на линеарну диференцијалну једначину првог реда коју знамо да решимо.

4. Решити диференцијалну једначину $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решење. Након дељења једначине са x добијамо једначину:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2,$$

односно имамо Бернулијеву једначину код које је $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{\ln x}{x}$ и $\alpha = 2$. Увесхћемо смену $z = y^{1-2} = y^{-1}$, под условом да је $y \neq 0$. Одатле је $y = z^{-1}$, односно $y' = -z^{-2}z'$. Заменом у једначину добијамо:

$$-z^{-2}z' + \frac{1}{x}z^{-1} = \frac{\ln x}{x}z^{-2}.$$

Након што помножимо једначину са $-z^2$, добићемо линеарну једначину по $z = z(x)$:

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}.$$

Њено решење је сада по формули једноставно

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = x \left(C - \int \frac{\ln x}{x^2} dx \right) \\ &= x \left(C + \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx \right) = x \left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) = Cx + \ln x + 1, \end{aligned}$$

одакле је

$$y(x) = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$

Приметимо да је $y = 0$ решење дате диференцијалне једначине, и то сингуларно решење.

2. *Решење.* Задатак се може решити и методом неодређених функција: Ако је $y(x) = u(x)v(x)$, тада имамо да је једначина еквивалентна са

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\ln x}{x}u^2v^2 \Leftrightarrow u'v + \left(v' + \frac{1}{x}v\right)u = \frac{\ln x}{x}u^2v^2.$$

Ако захтевамо да је $v' + \frac{v}{x} = 0$, као и у 2. решењу првог задатка код линеарних диференцијалних једначина, можемо узети да је $v = 1/x$. Одатле добијамо

$$\frac{1}{x}u' = \frac{\ln x}{x}u^2 \cdot \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Као и у првом решењу имамо да је

$$-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$$

одакле директно добијамо да је

$$u(x) = \frac{x}{Cx + \ln x + 1},$$

а самим тим и

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}.$$

□

5. Решити диференцијалну једначину $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Решење. У овом случају имамо да је $p(x) = 2x$ и $q(x) = 2x^3$, и $\alpha = 3$. Увођењем смене $z = y^{1-3} = y^{-2}$, за $y \neq 0$, добијамо да је $y = z^{-1/2}$, односно $y' = -\frac{1}{2}z^{-3/2}z'$, одакле је даље

$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z' + 2xz^{-\frac{1}{2}} = 2x^3z^{-\frac{3}{2}}.$$

Множењем једначине са $-2z^{\frac{3}{2}}$, добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$z' - 4xz = -4x^3,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int 4x dx} \left(C + \int (-4x^3) e^{-\int 4x dx} dx \right) = e^{2x^2} \left(C + \int -4x^3 e^{-2x^2} dx \right) \\ &= \left[\frac{t = -2x^2}{dt = -4x dx} \right] = e^{2x^2} \left(C - \frac{1}{2} \int t e^t dt \right) = e^{2x^2} \left(C - \frac{1}{2} (te^t - e^t) \right) \\ &= e^{2x^2} \left(C - \frac{1}{2} e^{-2x^2} (-2x^2 - 1) \right) = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Директно следи да је опште решење почетне једначине дато са

$$y^2(x) = \frac{1}{Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Приметимо још да је $y = 0$ сингуларно решење дате једначине.

□

6. Решити диференцијалну једначину $y'x^3 \sin y + 2y = xy'$.

Решење. Најпре, видимо да је дата једначина еквивалентна са

$$y'(x^3 \sin y - x) = -2y,$$

одакле је

$$y'(x) = \frac{2y}{x - x^3 \sin y},$$

односно, за $y \neq 0$,

$$x'(y) = \frac{x - x^3 \sin y}{2y} \Leftrightarrow x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{\sin y}{2y} \cdot x^3,$$

што је Бернулијева једначина за $\alpha = 3$. Након увођења смене $z = x^{1-3} = x^{-2}$, одакле је $x = z^{-1/2}$ и $x' = -\frac{1}{2}z^{-3/2}z'$, добијамо

$$-\frac{1}{2}z^{-3/2}z' - \frac{1}{2y}z^{-1/2} = -\frac{\sin y}{2y}z^{-3/2} \Rightarrow z' + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}.$$

Последња линеарна диференцијална једначина се сада једноставно решава:

$$\begin{aligned} z(y) &= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(C + \int \frac{\sin y}{y} e^{\int \frac{1}{y} dy} dy \right) = \frac{1}{y} \left(C + \int \frac{\sin y}{y} \cdot y dy \right) \\ &= \frac{1}{y} \left(C + \int \sin y dy \right) = \frac{1}{y} (C - \cos y), \end{aligned}$$

одакле је опште решење почетне једначине

$$x^2(y) = \frac{y}{C - \cos y}.$$

□

Једначина са тоталним диференцијалом

Једначину облика

$$(5) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

називамо једначином са тоталним диференцијалом уколико је испуњен услов $P'_y = Q'_x$. Идеја је да одредимо функцију $u = u(x, y)$ такву да је $du = P dx + Q dy$, односно

$$(6) \quad u'_x dx + u'_y dy = P dx + Q dy,$$

јер би тада (5) било еквивалентно са $du = 0$, одакле би опште решење дате диференцијалне једначине било одређено са $u(x, y) = C$.

Видимо да ће (6) бити испуњено уколико важи $u'_x(x, y) = P(x, y)$ и $u'_y(x, y) = Q(x, y)$. Видимо да из прве од тих веза следи да је

$$(7) \quad u(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y),$$

где је $C(y)$ функција по променљивој y , коју ћемо одредити из услова $u'_y = Q$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx + C(y) \right) &= Q(x, y) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y) &= Q(x, y) \\ \Leftrightarrow C'(y) &= Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx,\end{aligned}$$

па ћемо узети да је

$$C(y) = \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right] dy.$$

Заменом у (7) добијамо коначно да је

$$(8) \quad u(x, y) = \int P(x, y) dx + \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right] dy.$$

Могли смо да радимо и другим редоследом (прво искористимо да је $u'_y = Q$), па бисмо тада за функцију u добили да је $u = \int Q dy + \int \left[P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dy \right] dx$.

7. Решити диференцијалну једначину $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$.

Решење. У овом задатку је $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ и $Q = 6x^2y + 4y^3$. Пошто је

$$P'_y = 12xy = Q'_x,$$

то је ово једначина са тоталним диференцијалом, чије је решење $u(x, y) = C$, где је u дато са (8). Најпре, имамо да је

$$\int P(x, y) dx = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2,$$

одакле је

$$\begin{aligned}u(x, y) &= x^3 + 3x^2y^2 + \int \left[6x^2y + 4y^3 - (x^3 + 3x^2y^2)'_y \right] dy \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + \int 4y^3 dy = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.\end{aligned}$$

Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине је дато са

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

□

8. Решити диференцијалну једначину $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y \right) dx = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} - e^y \right) dy$.

Решење. Дату једначину можемо записати у еквивалентном облику

$$\left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right) dx - \left(x + \frac{x}{x^2+y^2} - e^y\right) dy = 0.$$

Ако је $P(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y$ и $Q(x, y) = -x - \frac{x}{x^2+y^2} + e^y$, тада из

$$P'_y(x, y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} - 1 = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - 1,$$

односно

$$Q'_x(x, y) = -1 - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -1 - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

директно следи да је $P'_y = Q'_x$, односно ради се о једначини са тоталним диференцијалом. Важи

$$\int P(x, y) dx = \int \left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right) dx = y \cdot \frac{1}{y} \arctg \frac{x}{y} - xy = \arctg \frac{x}{y} - xy.$$

Имајући у виду да је

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx \right) = \left(\arctg \frac{x}{y} - xy \right)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} - x = \frac{-x}{x^2+y^2} - x,$$

то је

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \arctg \frac{x}{y} - xy + \int \left[-x - \frac{x}{x^2+y^2} - e^y + \frac{x}{x^2+y^2} + x \right] dy \\ &= \arctg \frac{x}{y} - xy + \int e^y dy = \arctg \frac{x}{y} - xy + e^y, \end{aligned}$$

те је, коначно, опште решење дато са $\arctg \frac{x}{y} - xy + e^y = C$. □

Интеграциони фактор

У случајевима када имамо једначину облика

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

а притом не важи $P'_y = Q'_x$, ствар може спасити такозвани интеграциони фактор. То је функција $\lambda = \lambda(x, y)$ таква да је једначина

$$\lambda(x, y)P(x, y) dx + \lambda(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

једначина са тоталним диференцијалом. Дакле, треба да одредимо ту функцију λ из услова $(\lambda P)'_y = (\lambda Q)'_x$. Тај задатак није увек једноставан, али ће у задацима обично бити једна од ситуација где је $\lambda = \lambda(x)$ или $\lambda = \lambda(y)$.

9. За диференцијалну једначину

$$(x \sin y + y \cos y) dx + (x \cos y - y \sin y) dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(x)$, а затим решити једначину.

Решење. Интеграциони фактор одређујемо из

$$(\lambda(x)(x \sin y + y \cos y))'_y = (\lambda(x)(x \cos y - y \sin y))'_x,$$

одакле је

$$\lambda(x)(x \cos y + \cos y - y \sin y) = \lambda'(x)(x \cos y - y \sin y) + \lambda(x) \cos y,$$

односно

$$\lambda(x)(x \cos y - y \sin y) = \lambda'(x)(x \cos y - y \sin y).$$

Сада из

$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = dx \Big/ \int \Rightarrow \ln \lambda = x$$

добивамо да је $\lambda(x) = e^x$. Сада кад смо одредили интеграциони фактор, решавамо нови проблем:

$$e^x(x \sin y + y \cos y) dx + e^x(x \cos y - y \sin y) dy = 0,$$

што је сада једначина са тоталним диференцијалом, уз $P(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y)$ и $Q(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$. Важи

$$\begin{aligned} \int P(x, y) dx &= \int e^x(x \sin y + y \cos y) dx = \sin y \int x e^x dx + y \cos y \int e^x dx \\ &= \sin y(x e^x - e^x) + y \cos y e^x = ((x - 1) \sin y + y \cos y) e^x. \end{aligned}$$

Даље је

$$(((x - 1) \sin y + y \cos y) e^x)'_y = ((x - 1) \cos y + \cos y - y \sin y) e^x = (x \cos y - y \sin y) e^x,$$

одакле се једноставно добија да је опсте решење $u(x, y) = C$, где је

$$u(x, y) = ((x - 1) \sin y + y \cos y) e^x.$$

□

10. За диференцијалну једначину

$$2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика $\lambda(y)$, а затим решити једначину.

Решење. Интеграциони фактор ћемо одређивати из услова

$$(2xy \ln y \cdot \lambda(y))'_y = \left((x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) \cdot \lambda(y) \right)'_x,$$

односно

$$\begin{aligned} 2x(\ln y + 1)\lambda(y) + (2xy \ln y)\lambda'(y) &= 2x\lambda(y) \\ \Leftrightarrow 2x \ln y \cdot \lambda(y) + 2xy \ln y \cdot \lambda'(y) &= 0, \end{aligned}$$

одакле добијамо

$$\lambda'(y) = -\frac{\lambda(y)}{y} \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{dy}{y} \Big/ \int \Rightarrow \ln |\lambda| = -\ln |y|,$$

па ћемо узети да је $\lambda(y) = \frac{1}{y}$. Множењем почетне једначине добијеним интеграционим фактором, добијамо једначину са тоталним диференцијалом:

$$2x \ln y \, dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2 + 1} \right) dy = 0$$

Пошто је

$$\int P(x, y) \, dx = \int 2x \ln y \, dx = x^2 \ln y,$$

то је решење дате једначине $u(x, y) = C$, где је

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 \ln y + \int \left[\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2 + 1} - (x^2 \ln y)'_y \right] dy \\ &= x^2 \ln y + \int y\sqrt{y^2 + 1} \, dy = x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{3/2}. \end{aligned}$$

□

Диференцијалне једначине n -тог реда

Диференцијалне једначине којима се може снизити ред

Рекли смо да је општи облик диференцијалне једначине n -тог реда дат са $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. У неким примерима је могуће снизити ред такве једначине, пре свега неком погодном сменом. Уколико се, на пример, у једначини уопште не налазе функције $y, y', \dots, y^{k-1}$, за неко $k \leq n$, тада је очигледа избор смене $z(x) = y^{(k)}(x)$. Тада је $y^{(k+1)} = z'(x), \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$, те добијамо нову једначину облика $F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

1. Решити диференцијалну једначину $xy'' + y' - x^2 = 0$.

Решење. Приметимо да се у једначини нигде не појављује непозната функција y , па можемо увести смену $z(x) = y'(x)$. Тиме добијамо једначину

$$xz' + z - x^2 = 0 \Leftrightarrow z' + z/x = x,$$

што је линеарна диференцијална једначина првог реда. Њено решење је:

$$z(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C_1 + \int x e^{\int \frac{dx}{x}} \, dx \right) = \frac{1}{x} \left(C_1 + \int x^2 \, dx \right) = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3}.$$

Када вратимо смену $z = y'$, добијамо да је

$$y' = \frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3},$$

односно интегралењем, налазимо да је општо решење

$$y(x) = \int \left(\frac{C_1}{x} + \frac{x^2}{3} \right) dx = C_1 \ln |x| + \frac{x^3}{9} + C_2.$$

□

2. Решити диференцијалну једначину $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Решење. Увођењем смене $z(x) = y'(x)$ добијамо једначину

$$xz' = z \ln \frac{z}{x} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x},$$

што је хомогне диференцијална једначина. Ако уведемо смену $u = \frac{z}{x}$, имаћемо да је $z' = u'x + u$, одакле је

$$u'x + u = u \ln u,$$

односно, раздвајањем променљивих,

$$\frac{du}{u \ln u - u} = \frac{dx}{x}.$$

Како је

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \left[v = \ln u - 1 \right] \int \frac{dv}{v} = \ln |v| + C = \ln |\ln u - 1| + C,$$

то добијамо да је

$$\ln |x| = \ln |\ln u - 1| + C,$$

одакле је

$$|x| = |\ln u - 1|e^C,$$

па, уз одговарајућу смену, можемо писати

$$u = e^{C_1 x + 1},$$

односно

$$z = x e^{C_1 x + 1}.$$

Коначно, из $z = y'$ добијамо тражено опште решење дате једначине:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int x e^{C_1 x + 1} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{C_1 x + 1} dx \\ du = dx & v = \frac{e^{C_1 x + 1}}{C_1} \end{array} \right] \\ &= \frac{x e^{C_1 x + 1}}{C_1} - \int \frac{e^{C_1 x + 1}}{C_1} dx = \frac{x e^{C_1 x + 1}}{C_1} - \frac{e^{C_1 x + 1}}{C_1^2} + C_2. \end{aligned}$$

□

У ситуацији да имамо диференцијалну једначину у којој одређујемо $y(x)$ али се у једначини не појављује променљива x , можемо користити смену $z(y) = y'$, те да посматрамо једначину у којој је y променљива. Тада ћемо имати

$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z,$$

и слично за изводе вишег реда.

3. Решити диференцијалну једначину $y'' = (y')^3 + y'$.

Решење. Приметимо да дата једначина испуњава особину из претходне дискусије, тако да ћемо увести смену $z(y) = z = y'$, одакле знамо да је $y'' = z'z$, и даље

$$z'z = z^3 + z \Rightarrow z' = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 + 1} = dy.$$

Интеграљењем одатле добијамо да је $\arctg z = y + C_1$, односно $z = \operatorname{tg}(y + C_1)$. Ако сада вратимо смену, добићемо

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(y + C_1) \Rightarrow x = \int \frac{dy}{\operatorname{tg}(y + C_1)} = \int \frac{\sin(y + C_1)}{\cos(y + C_1)} dy = -\ln |\cos(y + C_1)| + C_2.$$

НАПОМЕНА: Приметимо да се у овој једначини не појављује y , тако да смо задатак могли радити и сменом из претходна два задатка. $\square$

4. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y'' = e^{2y}$ које задовољава услов $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

Решење. Увођењем смене $z(y) = y'$, добијамо једначину

$$z'z = e^{2y} \Rightarrow z dz = e^{2y} dy,$$

одакле интеграљењем добијамо да је

$$\frac{z^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1 \Leftrightarrow \frac{(y')^2}{2} = \frac{e^{2y}}{2} + C_1.$$

Да не бисмо непотребно вукли константу C_1 до краја задатка, можемо да је одмах одредимо користећи дате почетне услове. Знамо да за $x = 0$ важи $y = 0$ и $y' = 1$, па заменом тих вредности у претходну једнакост добијамо да је

$$\frac{1}{2} = \frac{e^0}{2} + C_1,$$

односно, $C_1 = 0$. Сада имамо да важи

$$(y')^2 = e^{2y} = (e^y)^2,$$

одакле је $y' = e^y$ или $y' = -e^y$. Ми желимо да једна од тих опција буде испуњена на целом скупу на ком решавамо једначину, па пошто знамо да је $e^y > 0$ и $y'(0) = 1 > 0$, то закључујемо да мора бити $y' = e^y$. Даље је једноставно:

$$\frac{dy}{e^y} = dx \Rightarrow x = \int e^{-y} dy = -e^{-y} + C_2.$$

Заменом $x = 0$, $y = 0$ добијамо непознату константу C_2 :

$$0 = -e^0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1,$$

па је тражено партикуларно решење дато са

$$x = 1 - e^{-y}.$$

$\square$

Линеарне хомогене диференцијалне једначине

Линеарна диференцијална једначина n -тог реда је једначина:

$$(9) \quad a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x).$$

Уколико је $f(x) = 0$, онда претходну једначину називамо хомогеном. Размотримо, за почетак линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Ако је $y_1 = y_1(x)$ једно партикуларно решење ове једначине, онда се сменом $z(x) = \frac{y}{y_1}$ може добити једначина којој можемо снизити ред. Заиста, ако је $y = z \cdot y_1$, тада је $y' = z'y_1 + zy_1'$, као и $y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$, одакле добијамо

$$a(x)(z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'') + b(x)(z'y_1 + zy_1') + c(x)zy_1 = 0,$$

односно груписањем чланова уз z, z' и z'' :

$$z''(a(x)y_1) + z'(2a(x)y_1' + b(x)y_1) + \underbrace{z(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1)}_{=0} = 0,$$

чиме добијамо једначину у којој се не појављује z :

$$z''(a(x)y_1) + z'(2a(x)y_1' + b(x)y_1) = 0,$$

па можемо да јој снизимо ред сменом $u = z'$.

5. Решити диференцијалну једначину $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ ако је $y_1 = e^x$ једно партикуларно решење дате једначине.

Решење. За почетак, проверимо да $y_1 = e^x$ заиста јесте решење дате једначине:

$$(2x - x^2)(e^x)'' + (x^2 - 2)(e^x)' + 2(1 - x)e^x = (2x - x^2 + x^2 - 2 + 2 - 2x)e^x = 0.$$

За налажење општег решења ћемо искористити смену $z = \frac{y}{e^x}$, одакле је $y = z \cdot e^x$, а одатле и $y' = (z' + z)e^x$, односно $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Заменом у дату једначину добијамо

$$(2x - x^2)z'' - (x^2 - 4x + 2)z' = 0,$$

што је једначина којој можемо спустити ред сменом $u = z'$, чиме долазимо до једначине

$$(2x - x^2)u' = (x^2 - 4x + 2)u,$$

односно, раздвајањем променљивих

$$\frac{du}{u} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - x^2} dx.$$

Интегралењем даље добијамо

$$\begin{aligned} \ln |u| &= \int \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - x^2} dx = \int \frac{(x^2 - 2x) + (2 - x) - x}{x(2 - x)} dx \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2} \right) dx = -x + \ln |x| + \ln |x - 2| + C, \end{aligned}$$

односно

$$\ln \left| \frac{u}{x(x-2)} \right| = -x + C \Rightarrow \frac{u}{x(x-2)} = e^{-x} C_1.$$

Тиме смо добили да је $z' = C_1 e^{-x}(x^2 - 2)$, одакле је

$$\begin{aligned} z(x) &= C_1 \int e^{-x}(x^2 - 2x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 2x \\ du = (2x - 2) dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right] \\ &= C_1 \left(-e^{-x}(x^2 - 2x) + \int (2x - 2)e^{-x} dx \right) = \left[\begin{array}{l} u = 2x - 2 \\ du = 2 dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^{-x} dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right] \\ &= C_1 \left(-e^{-x}(x^2 - 2x) - e^{-x}(2x - 2) + \int 2e^{-x} dx \right) \\ &= -C_1 (e^{-x}(x^2 - 2x + 2x - 2 + 2) + C) = -C_1 e^{-x} x^2 + C_2. \end{aligned}$$

Коначно, враћајући се на почетну смену, добијамо да је тражено опште решење:

$$y(x) = -C_1 x^2 + C_2 e^x.$$

□

НАПОМЕНА: Ако су y_1 и y_2 два независна решења хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда, тада је опште решење те једначине $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Можемо утврдити да је у претходном задатку $y_2 = x^2$ заиста решење једначине. Аналоган закључак важи и у случају једначина вишег реда.

6. Решити диференцијалну једначину $(x-1)y'' + (4x-5)y' + (4x-6)y = 0$ ако је једно решење облика $y_1 = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

Решење. Одредимо најпре a из облика партикуларног решења: Уврштањем $y_1 = e^{ax}$, $y'_1 = ae^{ax}$ и $y''_1 = a^2 e^{ax}$ у једначину добијамо

$$(x-1)a^2 e^{ax} + (4x-5)ae^{ax} + (4x-6)e^{ax} = 0,$$

односно

$$(a^2 + 4a + 4)x - (a^2 + 5a + 6) = 0.$$

Одавде следи да мора бити $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 5a + 6 = 0$, што повлачи да је $a = -2$. Дакле, $y_1 = e^{-2x}$, па ћемо за решавање дате једначине користити смену $y = ze^{-2x}$. Заменом у једначину, имајући у виду $y' = (z' - 2z)e^{-2x}$ и $y'' = (z'' - 4z' + 4z)e^{-2x}$, након краћег рачуна добијамо

$$(x-1)z'' - z' = 0.$$

Даље идемо стандардно: $u = z'$ па раздвојимо променљиве:

$$(x-1)u' = u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{x-1}.$$

Интегралењем добијамо:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \ln |u| = \ln |x-1| + C,$$

одакле следи $z' = u = C_1(x-1)$. Сада је

$$z = \int C_1(x-1) dx = C_1 \frac{(x-1)^2}{2} + C_2,$$

па је одавде решење почетне једначине (уз модификацију константе C_1):

$$y(x) = (C_1(x-1)^2 + C_2)e^{-2x}.$$

□

Линеарне хомогене диференцијалне једначине са константним коефицијентима

Диференцијална једначина n -тог облика

$$(10) \quad a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0,$$

при чему је $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ назива се *линеарном хомогеном диф. једначином n -тог реда са константним коефицијентима*.

Једначини (10) придружимо њену *карактеристичну једначину*

$$(11) \quad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

при чему се сам полином из те једначине назива карактеристичним полиномом. Јасно је да та једначина има n решења која ћемо означити са $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Свако од тих решења генерише једно решење $y_1, \dots, y_n$ почетне диференцијалне једначине. Ова решења су међусобно независна, и опште решење је дато са $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$. Разликујемо следеће случајеве за решења једначине (11):

1. λ_i је једноструко решење једначине (11): Тада оно генерише решење j -не (10) облика $y_i = e^{\lambda_i x}$.
2. λ_i је вишеструко решење вишеструкости k : Тада је са λ_i генерисано k независних решења једначине (10) облика $y_i = e^{\lambda_i x}, y_{i+1} = x e^{\lambda_i x}, \dots, y_{i+k-1} = x^{k-1} e^{\lambda_i x}$.
3. λ_i и λ_{i+1} су једнострука, конјуговано комплексна решења: Ако је $\lambda_i = a + bi$ (односно $\lambda_{i+1} = a - bi$), онда су дефинисана два решења једначине (10) облика $y_i = e^{ax} \cos bx$ и $y_{i+1} = e^{ax} \sin bx$.
4. У случају комплексних решења вишеструкости веће од 1, можемо препоставити да је $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = a + bi$, и $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{2k} = a - bi$. Тада имамо $2k$ независних решења једначине (10) која су дата са $y_1 = e^{ax} \cos bx, \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx$, односно $y_{k+1} = e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$.

7. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решење. Карактеристична једначина која одговара датој диференцијалној једначини је

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

чија су решења $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, па је опште решење почетне једначине

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

□

8. Решити дифференцијалну једначину $y''' - y' = 0$, а затим наћи партикуларно решење за које важи $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

Решење. Из карактеристичне једначине

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

добивамо нуле $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 1$, одакле добијамо опште решење једначине

$$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Уврштајући почетне услове, имајући у виду да је

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_2 e^x - C_3 e^{-x}, \\ y''(x) &= C_2 e^x + C_3 e^{-x}, \end{aligned}$$

добивамо систем

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_2 - C_3 &= -1 \\ C_2 + C_3 &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $(C_1, C_2, C_3) = (-1, 0, 1)$. Дакле, тразено решење датог Кошијевог проблема је:

$$y(x) = -1 + e^{-x}.$$

□

9. Решити дифференцијалну једначину $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решење. Карактеристична једначина је

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 &= 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) &= 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

одакле имамо једну једноструку нулу $\lambda_1 = -1$ и једну двоструку нулу $\lambda_{2,3} = 1$. Самим тим, опште решење дате једначине је

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

□

10. Решити дифференцијалну једначину $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$.

Решење. За карактеристичну једначину која одговара датој једначини,

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda^4 - 1 + 2\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) + 2\lambda(\lambda^2 - 1) &= 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1 + 2\lambda) = 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3 = 0, \end{aligned}$$

видимо да има једно једноструко решење $\lambda_1 = 1$ и једно троструко решење $\lambda_{2,3,4} = -1$. Одатле следи да је опште решење дато са:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}.$$

□

11. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y''' + y' = 0$, које задовољава $y(\frac{\pi}{2}) = 2$, $y'(\frac{\pi}{2}) = y''(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Решење. Одредимо најпре опште решење дате диференцијалне једначине: Нуле карактеристичне једначине

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i = 0 \pm 1i$, одакле видимо да је тражено опште решење дато са

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Поште је

$$y'(x) = -C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

$$y''(x) = -C_2 \cos x - C_3 \sin x,$$

то из датих почетних услова добијамо систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcl} C_1 & + C_3 & = 2 \\ -C_2 & & = -1, \\ & -C_3 & = -1 \end{array}$$

одакле је $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, па је тражено партикуларно решење:

$$y(x) = 1 + \cos x + \sin x.$$

□

12. Решити диференцијалну једначину $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решење. Нуле карактеристичне једначине

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

су $\lambda_1 = 2 + 3i$ и $\lambda_2 = 2 - 3i$, па је опште решење дато са

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x.$$

□

13. Решити диференцијалну једначину $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Решење. Из карактеристичне једначине

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2 = 0$$

добијамо две двоструке комплексно-конјуговане нуле $\lambda_{1,2} = -i$ и $\lambda_{3,4} = i$. Одатле следи да је

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x$$

опште решење дате једначине.

□

Линеарне нехомогене једначине са константним коефицијентима

Једначина

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

назива се *линеарна нехомогена диференцијална једначина са константним коефицијентима*. Заједно са овом једначином, посматраћемо и њој одговарајућу хомогену једначину

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Уколико је $y_h = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ опште решење хомогене, а y_p неко партикуларно решење нехомогене једначине, тада је опште решење полазне једначине дато са

$$y = y_h + y_p = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_p.$$

Видели смо у ранијим задацима како се одређује опште решење хомогене једначине, тако да нам је тежистхте проблема у одређивању партикуларног решења.

Метода неодређених коефицијената

Уколико је функција $f(x)$ наредног, специјалног, облика,

$$(12) \quad f(x) = e^{ax} [P_{m_1}(x) \cos bx + Q_{m_2}(x) \sin bx],$$

где су $P_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$ полиноми степена m_1 и m_2 , редом, тада је партикуларно решење облика

$$y_p = x^k e^{ax} [P_m^*(x) \cos bx + Q_m^*(x) \sin bx],$$

при чему су $P_m^*(x)$ и $Q_m^*(x)$ полиноми степена $m = \max\{m_1, m_2\}$, а k вишеструкост корена $a + bi$ у карактеристичној једначини $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$.

1. Решити диференцијалну једначину $y'' - 2y' + 2y = e^x(2 \cos x - 4x \sin x)$.

Решење. Одредимо најпре опште решење придружене хомогене једначине $y'' - 2y' + 2y = 0$:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i,$$

одакле је тражено решење хомогене једначине

$$y_h = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

Партикуларно решење y_p дате једначине ћемо одредити методом неодређених коефицијената. Пошто је

$$f(x) = e^x(2 \cos x - 4x \sin x) = e^{1x}(2 \cos(1x) + (-4x) \sin(1x)),$$

то је, као у уводној причи, $a = 1$, $b = 1$, $P_0(x) = 2$ и $Q_1(x) = -4x$. Пошто је $a + bi = 1 + i$ једноструко решење карактеристичне једначине, то је $k = 1$, а $m = \max\{0, 1\} = 1$, те је тражено решење облика

$$y_p = x e^x [(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x].$$

Коефицијенте A, B, C и D ћемо одредити тако што најпре убацимо y_p, y_p' и y_p'' у једначину. Након нешто дужег рачуна добијамо да је

$$y_p' = e^x [(A + C)x^2 + (2A + B + D)x + B] \cos x + [(C - A)x^2 + (D - B + 2C)x + D] \sin x,$$

односно

$$y_p'' = e^x [(2Cx^2 + (4A + 4C + 2D)x + (2A + 2B + 2D)) \cos x + (-2Ax^2 + (-4A - 2B + 4C)x + (2D - 2B + 2C)) \sin x].$$

Заменом у једначину, након сређивања добијамо да је

$$e^x [(4Cx + (2A + 2D)) \cos x + (-4Ax + (2C - 2B)) \sin x] = e^x (2 \cos x - 4x \sin x),$$

односно

$$4Cx \cos x + (2A + 2D) \cos x - 4Ax \sin x + (2C - 2B) \sin x = 2 \cos x - 4x \sin x.$$

Пошто су $\cos x, \sin x, x \cos x$ и $x \sin x$ независне функције, изједначавајући коефицијенте уз њих са обе стране, добијамо систем једначина

$$\begin{array}{rcl} 2A & +2D & = 2 \\ -2B + 2C & & = 0 \\ 4C & & = 0 \\ -4A & & = -4 \end{array},$$

чијим решавањем једноставно добијамо $A = 1$ и $B = C = D = 0$, одакле директно следи решење које смо тражили, $y_p = x^2 e^x \cos x$. Коначно опште решење полазне нехомогене једначине је

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x.$$

□

2. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' = 4x^2 e^x$.

Решење. Решења карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda = 0$ су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, одакле добијамо да је решење хомогене једначине $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$. Пошто је $f(x) = e^x (4x^2 \cos 0x + \sin 0x)$, то је $a = 1$, $b = 0$, па пошто $a + bi = 1$ није решење карактеристичне једначине то је $k = 0$. Такође, важи $m = \max\{2, 0\} = 2$, па је облик решења почетне нехомогене једначине дат са

$$y_p = e^x (Ax^2 + Bx + C).$$

Диференцирањем је даље

$$y_p' = e^x (Ax^2 + (2A + B)x + (B + C)),$$

као и

$$y_p'' = e^x (Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C)).$$

Заменом y_p' и y_p'' у полазну једначину, након сређивања добијамо да је

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = 4x^2.$$

Изједначавајући одговарајуће коефицијенте уз $1, x$ и x^2 са обе стране једнакости добијамо систем

$$\begin{array}{rcl} 2A & & = 4 \\ 6A + 2B & & = 0, \\ 2A + 3B + 2C & & = 0 \end{array}$$

чијим решавањем добијамо $A = 2$, $B = -6$ и $C = 7$. Дакле, партикуларно решење је

$$y_p = e^x (2x^2 - 6x + 7),$$

одакле је опште решење дате једначине

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x (2x^2 - 6x + 7).$$

□

3. Решити дифференцијалну једначину $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Решење. Из карактеристичне једначине

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0,$$

добивамо $\lambda_{1,2} = 0$ и $\lambda_3 = 1$, па је опште решење хомогене једначине која одговара датој

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Из $f(x) = e^{0x}((12x^2 + 6x)\cos 0x + \sin 0x)$ добијамо да је $a = 0$, $b = 0$, односно $a + bi = 0$ што је двострука нула карактеристичне једначине, односно $k = 2$. Јасно је да је $m = 2$, па је решење нехомогене једначине дато са

$$y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

Диференцирањем добијамо да важи

$$y'_p = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$y''_p = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$y'''_p = 24Ax + 6B.$$

Заменом у полазну једначину добијамо

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x,$$

одакле, изједначавајући коефицијенте, добијамо систем

$$\begin{aligned} -12A &= 12 \\ 24A - 6B &= 6, \\ 6B - 2C &= 0 \end{aligned}$$

чије је решење $(A, B, C) = (-1, -5, -15)$. Тражено партикуларно решење је, дакле,

$$y_p = x^2(-x^2 - 5x - 15),$$

односно опште решење полазне једначине је

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^2(x^2 + 5x + 15).$$

□

Уколико нам је дата једначина

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f_1(x) + \dots + f_N(x),$$

где је свака од функција $f_1, \dots, f_N$ одговарајућег облика

$$f_i(x) = e^{a_ix} [P_{m_1,i}(x) \cos b_ix + Q_{m_2,i}(x) \sin b_ix], \quad i = 1, \dots, N,$$

тада ћемо одредити партикуларно решење y_{p_i} за сваки од проблема

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f_i(x), \quad i = 1, \dots, N,$$

па ће опште решење полазног проблема бити дато са

$$y = y_h + y_{p_1} + \dots + y_{p_N},$$

где је y_h решење хомогене једначине која одговара датој нехомогеној једначини.

4. Решити диференцијалну једначину $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x$.

Решење. Решења карактеристичне једначине су $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, па је опште решење хомогене једначине дато са $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$. У овом примеру имамо да је $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -e^{-x}$ и $f_3(x) = e^x$, што су све функције траженог облика. За сваку од њих налазимо одговарајуће партикуларно решење:

За $f_1(x) = x^2$ имамо да је $a = b = 0$, одакле је $k = 1$ ($a + bi = 0$ је једнострука нула) и $m = 2$, па је $y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$. Двоструким диференцирањем y_{p_1} и заменом у једначину добијамо да је

$$3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C) = x^2,$$

односно имамо систем

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ 6A + 2B &= 0, \\ 2B + C &= 0 \end{aligned}$$

чијим решавањем налазимо $A = \frac{1}{3}$, $B = -1$ и $C = 2$. Партикуларно решење је $y_{p_1} = x\left(\frac{1}{3}x^2 - x + 2\right)$.

За $f_2(x) = -e^{-x}$ добијамо $a = -1$, $b = 0$, одакле је $k = 1$, па је $y_{p_2} = xe^{-x} \cdot A$. Даље је $y'_{p_2} = A(1 - x)e^{-x}$ и $y''_{p_2} = A(x - 2)e^{-x}$. Заменом назад у једначину имамо да је важи

$$A(x - 2 + 1 - x)e^{-x} = -e^{-x} \Leftrightarrow A = 1,$$

па је $y_{p_2} = xe^{-x}$.

За $f_3(x) = e^x$ је $a = 1$, $b = 0$, па је $k = 0$, односно $y_{p_3} = Ae^x$. Одатле је $y''_{p_3} + y'_{p_3} = 2Ae^x = e^x$, па је $A = \frac{1}{2}$ и $y_{p_3} = \frac{1}{2}e^x$.

Коначно, за опште решење важи

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = C_1 + C_2 e^{-x} + x\left(\frac{1}{3}x^2 - x + 2\right) + xe^{-x} + \frac{1}{2}e^x.$$

□

Метода варијације константи

Претпоставимо опет да имамо једначину

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

при чему функција $f(x)$ више не мора бити облика (12). Ако је $y_h = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ опште решење одговарајуће хомогене једначине, тада ћемо решење полазне нехомогене једначине тражити у облику $y = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n$, где непознате функције $C_1(x), \dots, C_n(x)$ (односно њихове изводе) одређујемо из система

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} C'_1 y_1 &+ \dots + C'_n y_n &= 0 \\ C'_1 y'_1 &+ \dots + C'_n y'_n &= 0 \\ &\vdots &\vdots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} &+ \dots + C'_n y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned} \right\}.$$

5. Решити диференцијалну једначину $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \ln x$.

Решење. На основу карактеристичне једначине $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -3$ добијамо опште решење хомогене једначине $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$. Решење полазне једначине ћемо тражити у облику $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где се C'_1 и C'_2 одређују из система

$$\left. \begin{aligned} C'_1 e^{-3x} + C'_2 x e^{-3x} &= 0 \\ C'_1(-3e^{-3x}) + C'_2(1-3x)e^{-3x} &= e^{-3x} \ln x \end{aligned} \right\},$$

односно

$$\left. \begin{aligned} C'_1 + xC'_2 &= 0 \\ -3C'_1 + (1-3x)C'_2 &= \ln x \end{aligned} \right\}.$$

Једноставно се добија $C'_1(x) = -x \ln x$ и $C'_2(x) = \ln x$, одакле је

$$C_1(x) = -\int x \ln x \, dx = -\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + D_1,$$

односно

$$C_2(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + D_2.$$

Заменом назад у формулу за y , имамо да је тражено опште решење

$$y = \left[\frac{x^2}{4}(1 - 2 \ln x) + D_1\right] e^{-3x} + [x(\ln x - 1) + D_2] x e^{-3x}.$$

□

6. Решити диференцијалну једначину $y''' + y' = \sin x + \frac{1}{\sin x}$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $\lambda^3 + \lambda = 0$ су $\lambda = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$, одакле је опште решење хомогене једначине

$$y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Опште решење нехомогене једначине ћемо тражити у облику $y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x$, где C'_1, C'_2 и C'_3 налазимо из одговарајућег система:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 + C'_2 \cdot \cos x + C'_3 \cdot \sin x &= 0 \\ -C'_2 \cdot \sin x + C'_3 \cdot \cos x &= 0 \\ -C'_2 \cdot \cos x - C'_3 \cdot \sin x &= \sin x + \frac{1}{\sin x} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \cdot (-\frac{\cos x}{\sin x}) \\ \leftarrow + \end{array}$$

односно

$$\left. \begin{aligned} C'_1 + C'_2 \cdot \cos x + C'_3 \cdot \sin x &= 0 \\ -C'_2 \cdot \sin x + C'_3 \cdot \cos x &= 0 \\ C'_3 \left(-\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \right) &= \sin x + \frac{1}{\sin x} \end{aligned} \right\}.$$

Из последње једначине је $C_3'(x) = -(\sin^2 x + 1)$, одакле добијамо и да је $C_2'(x) = -\sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin x}$, односно $C_1'(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$. Интеграљењем добијамо непознате функције:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) dx = -\cos x + \int \frac{dx}{\sin x} = \left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2 dt}{t^2 + 1} \right] \\ &= -\cos x + \int \frac{\frac{2}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} dt = -\cos x + \int \frac{dt}{t} = -\cos x + \ln |t| + D_1 \\ &= -\cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + D_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= - \int \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) \cos x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] \\ &= - \int t + \frac{1}{t} dt = - \left(\frac{t^2}{2} + \ln |t| \right) + D_2 \\ &= - \frac{\sin^2 x}{2} - \ln |\sin x| + D_2, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} C_3(x) &= - \int (\sin^2 x + 1) dx = - \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + 1 \right) dx \\ &= - \frac{3}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + D_3. \end{aligned}$$

Коначно, опште решење почетне нехомогене диференцијалне једначине је

$$y = \left[-\cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + D_1 \right] + \left[-\frac{\sin^2 x}{2} - \ln |\sin x| + D_2 \right] \cos x + \left[-\frac{3}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + D_3 \right] \sin x.$$

□