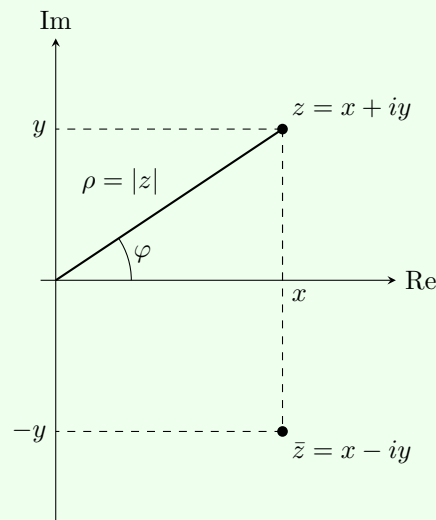


Функције комплексне променљиве

Скуп комплексних бројева означавамо са $\mathbb{C}$. Његови елементи су облика $z = x + iy$, где су $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ бројеви које редом зовемо *реалним* и *имагинарним* делом комплексног броја z , док је i имагинарна јединица, одређена са $i^2 = -1$.

Сваком комплексном броју z одговара *конјуговано комплексни* број $\bar{z} = x - iy$. Једноставно добијамо да важи $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ и $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Комплексне бројеве ћемо графички представљати у комплексној равни, при чему ћемо на осаму редом означавати реалне и имагинарне делове сваког броја. Преко поларних координата је $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$, где је $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ растојање броја до координатног почетка. То растојање се још зове и *модуо* комплексног броја, и означава са $|z|$. Угао $\varphi \in [0, 2\pi)$ се означава са $\arg z$ и зовемо га *главним делом аргумента* броја z , док се скуп $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ зове аргумент комплексног броја z . Комплексан број $z = 0$ нема дефинисан аргумент.



Тригонометријски облик броја z је $z = \rho(\underbrace{\cos \varphi + i \sin \varphi}_{\operatorname{cis} \varphi}) = |z| \operatorname{cis}(\arg z)$. Експоненцијална функција са изложивоцем $i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ се дефинише као

$$\varphi \mapsto e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

и ова функција има многа својства на која смо навикли од „обичне” експоненцијалне функције као што је $e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$,

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi + i \sin -\varphi = \cos \varphi - i \sin \varphi = \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}},$$

односно

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ &= e^{i(\varphi + \psi)}, \end{aligned}$$

а важи и $e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{2k\pi} = e^{i\varphi}$, као и $|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$.

Експоненцијални облик комплексног броја је $z = \rho \cdot e^{i\varphi} = |z|e^{i \arg z}$. Ако је $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, тада је $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, и важи $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, односно $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$. Такође, важи $z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Формула $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ је позната као *Моаврова формула*.

1. Одредити следеће скупове тачака у комплексној равни:

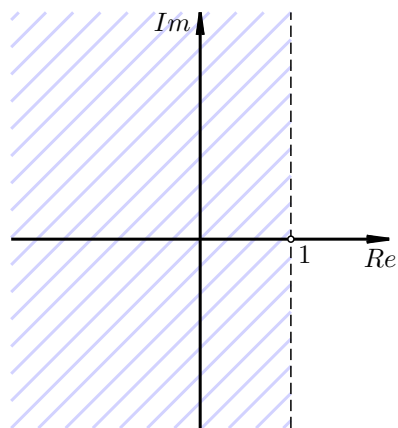
(1) $\text{Re } z < 1$;

(2) $\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$;

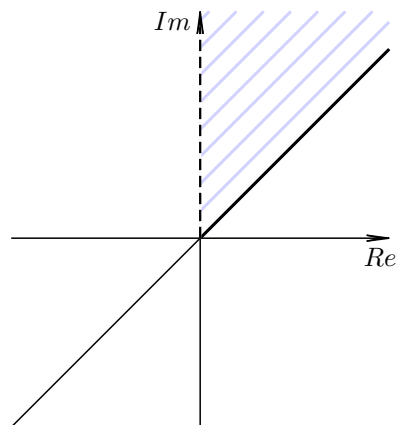
(3) $|z - 2 + i| = 3$.

Решење.

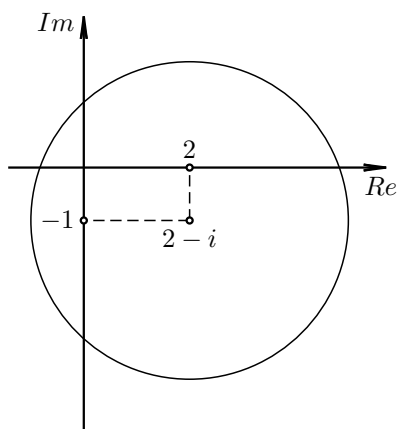
(1) Ако запишемо $z = x + iy$, онда је дати услов могуће записати као $x < 1$, што се у комплексној равни може представити као на слици.



(2) Дата област је означена на слици.



(3) Уколико је $z = x + iy$, тада је $|z - 2 + i| = 3$ еквивалентно са $|x - 2 + i(y + 1)| = 3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$, односно ради се о кругу са центром у $2 - i$ и полупречником 3.



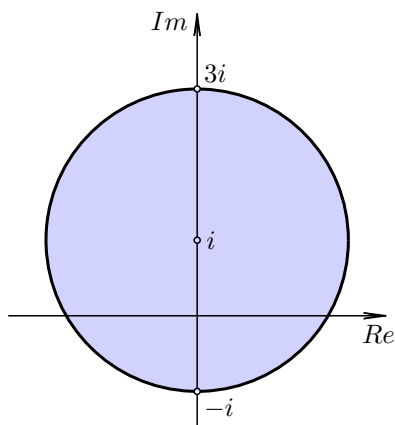
□

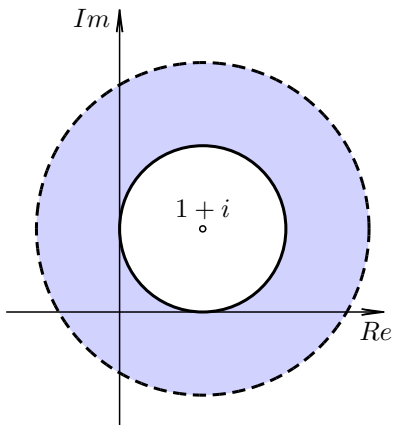
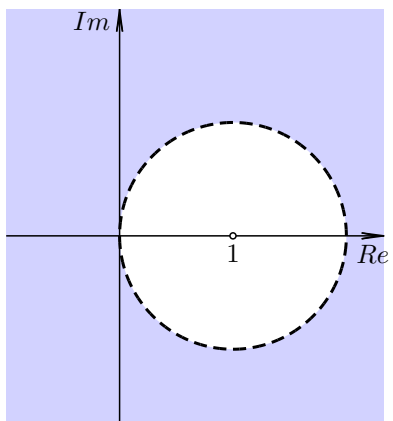
2. Одредити следеће скупове тачака у комплексној равни:

- (1) $|z - i| \leq 2$;
- (2) $|z - 1| > 1$;
- (3) $1 \leq |z - 1 - i| < 2$.

Решење.

Тражени скупови тачака су означени на сликама у наставку.





□

Гранична вредност комплексног низа $(z_n) = (x_n + iy_n)$ је комплексан број a , ако за сваку околину тачке a важи да се у њеној спољашњости налази само коначно много чланова тог низа. Пишемо стандардно $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Низ (z_n) конвергира ако и само ако конвергирају низови (x_n) и (y_n) , и тада важи $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

3. Испитати конвергенцију низова:

(1) $z_n = (-1)^n + i \frac{n}{n+1}$;

(2) $z_n = \frac{n}{n+i}$;

(3) $z_n = 1 + i \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Решење.

(1) Пошто је $x_n = (-1)^n$ дивергентан низ, то и z_n дивергира.

(2) Имамо најпре да је

$$z_n = \frac{n}{n+i} = \frac{n(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \frac{n^2-in}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} + i \frac{-n}{n^2+1}.$$

Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1, \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2+1} = 0,$$

то је $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 + i \cdot 0 = 1$.

(3) Јасно је да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 + i \cdot 0 = 1$. □

4. Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Решење. Видимо најпре да важи

$$1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x+iy}{n} = 1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n} = \rho e^{i\varphi},$$

где је

$$\rho = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} = \left(1 + \frac{2xn + x^2 + y^2}{n^2}\right)^{1/2},$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{y}{n+x}.$$

Одатле је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{in\varphi} = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z,$$

јер је испуњено

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2xn + x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{2xn + x^2 + y^2}}\right)^{\frac{n^2}{2xn + x^2 + y^2} \cdot \frac{2xn + x^2 + y^2}{n^2} \cdot \frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2xn + x^2 + y^2}{2n}} = e^x, \end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n\varphi &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{t+x} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{t+x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{(t+x)^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 y}{(t+x)^2 + y^2} = y. \end{aligned}$$

□

Видели смо како смо дефинисали експоненцијалну функцију за аргумент облика $i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Природно се та дефиниција продужава за случај кад је аргумент произвољан комплексан број $z = x + iy$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Аналогно случају експоненцијалне функције, и све остале реалне елементарне функције се могу уопштити тако да буду дефинисане за комплексне вредност аргумента z . За неке је то уопштење крајње једноставно, па се тако нпр. полиномске функције дефинишу као

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C},$$

и, последично, рационалне функције као $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, док је за неке функције то уопштење мало суптилније. Размотримо синус и косинус: Пошто важи

$$\left. \begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

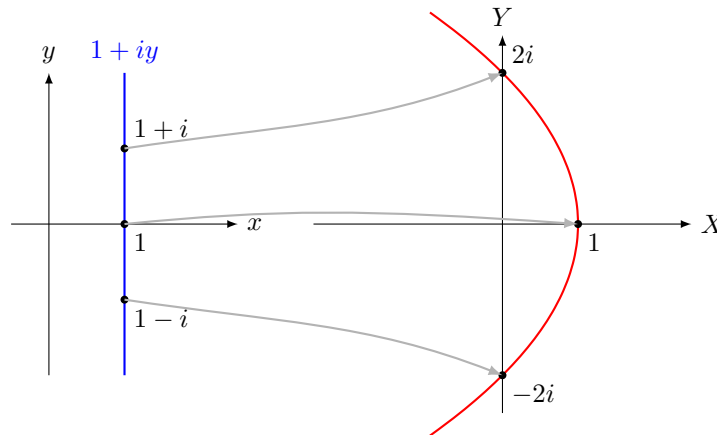
то се лако изражава да је $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, односно $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$, за реалан аргумент φ . На основу овога ћемо дефинисати синус и косинус на скупу $\mathbb{C}$ као

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \text{односно} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Комплексну функцију ћемо графички најједноставније представити преко две комплексне равни, што ћемо демонстрирати у наредна два примера.

5. Функцијом $f(z) = z^2$ пресликати праву $1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$.

Решење. Имамо да је $f(1 + iy) = (1 + iy)^2 = 1 - y^2 + 2iy$. Ако је $X = 1 - y^2$ и $Y = 2y$, онда је $f(1 + iy) = X + iY$. Лако добијамо везу $Y^2 = 4(1 - X)$, што представља параболу у (X, Y) равни. На наредној слици је графички представљено дато пресликавање, са назначеним неким тачкама и њиховим сликама.

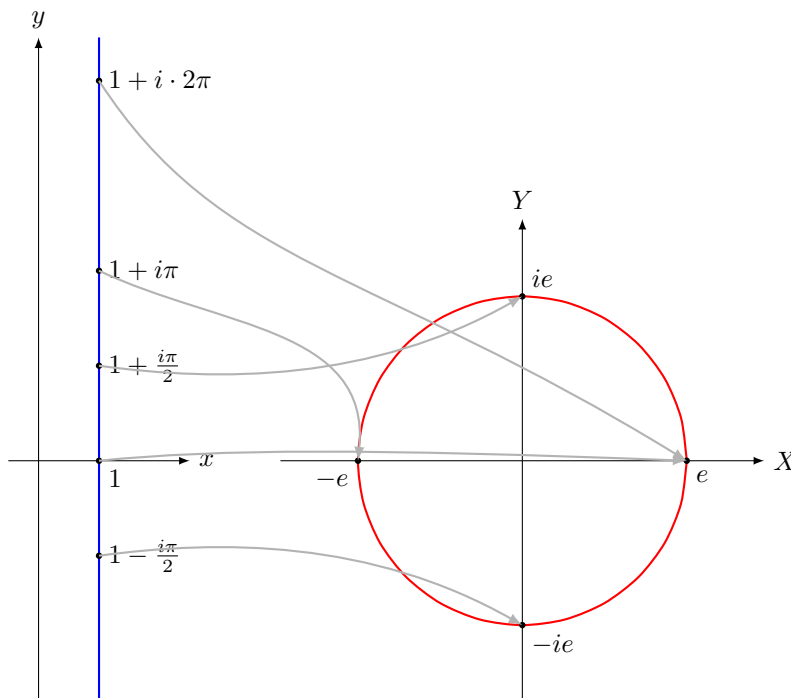


□

6. Функцијом $f(z) = e^z$ пресликати праву $1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$.

Решење. Важи $f(1 + iy) = e^{1+iy} = e^1 \cdot e^{iy} = e(\cos y + i \sin y) = e \cos y + ie \sin y = X + iY$. Из $X = e \cos y$, $Y = e \sin y$ следи да је $X^2 + Y^2 = e^2$, што представља кружницу у (X, Y) равни. Опет ћемо графички представити ово пресликавање, при чему смо најпре утврдили неке вредности и њихове слике:

$$\begin{aligned} f(1) &= e(\cos 0 + i \sin 0) = e, \\ f\left(1 \pm \frac{\pi}{2}\right) &= e\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \pm ie, \\ f(1 + i\pi) &= e(\cos \pi + i \sin \pi) = -e, \\ f(1 + i \cdot 2\pi) &= e(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e. \end{aligned}$$



□

На основу дискусије о експоненцијалној функцији, као и претходног примера, видимо да је $e^z = e^{z+2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, односно бесконачно много тачака $(z, z \pm 2\pi i, z \pm 4\pi i, \dots)$ се том функцијом слика у једну тачку $\omega = e^z$. То нам прави проблем код класичног одређивања инверзне функције.

Ми ћемо зато дефинисати такозвану *вишезначну* функцију $\text{Ln}(\cdot)$ која слика тачку ω у све тачке z такве да је $e^z = \omega$. Тако дефинисана функција је уопштење логаритамске функције *Грану* функције $\text{Ln}(\cdot)$ за коју је $\text{Im}(\text{Ln } \omega) \in [0, 2\pi)$ називамо *главном граном* логаритамске функције и означавамо је са $\ln(\cdot)$. Заправо, имамо да важи

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \cdot \text{Arg } z, \quad z \neq 0,$$

односно

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad z \neq 0,$$

где је $\ln(\cdot)$ са десне стране претходних једнакости стандардна логаритамска једначина реалне променљиве.

Уопштена степена функција $z \mapsto z^a$ је такође вишезначна функција, и мотивисани знањима из реалног случаја ($x^a = e^{a \ln x}$), дефинишемо је као $z^a := e^{a \text{Ln } z}$, $z \neq 0$.

7. Израчунати $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$, $\operatorname{Ln}(1+i)$ и $\ln(1+i)$.

Решење. Према дефиницији логаритамске функције важи

$$\operatorname{Ln} i = \ln |i| + i \operatorname{Arg}(i) = \ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Јасно је да је $\ln i = i \frac{\pi}{2}$. Даље, важи

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \ln |1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

односно $\ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}$. □

8. Израчунати i^i .

Решење. На основу дефиниције степене функције и претходног задатка је

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)}.$$

□

Функције са којима ћемо се често сретати су *хиперболичке* тригонометријске функције. Хиперболички синус и хиперболички косинус се редом дефинишу као $\operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ и $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Основни идентитет који они задовољавају је $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

9. Доказати да је $\sin ix = i \operatorname{sh} x$ и $\cos ix = \operatorname{ch} x$.

Решење. Имамо да је

$$\sin ix = \frac{e^{i \cdot ix} - e^{-i \cdot ix}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i^2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2i} = i \operatorname{sh} x,$$

односно

$$\cos ix = \frac{e^{i \cdot ix} + e^{-i \cdot ix}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x.$$

□

Гранична вредност функције комплексне променљиве се дефинише слично као у случају граничне вредности функције реалне променљиве: Број $A \in \mathbb{C}$ је гранична вредност функције f у тачки $z = a$ ако за сваку околину V тачке A , постоји пробушена околина $\overset{\circ}{U}$ тачке a , тако да важи $f(\overset{\circ}{U}) \subset V$. Тада пишемо

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A.$$

Ако је $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, и $z_0 = x_0 + iy_0$, онда гранична вредност $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ постоји ако постоје $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y)$ и тада важи

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y)$$

За функцију f кажемо да је непрекидна у тачки $z = a$ уколико је $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$. Као и у реалном случају, елементарне комплексне функције су непрекидне на областима где су дефинисане, при чему вреди напоменути да функције $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$ и $z \mapsto \operatorname{Im} z$ нису елементарне.

10. Испитати да ли постоји $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, ако је:

$$(1) f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2};$$

$$(2) f(z) = \frac{z^2}{|z|^2};$$

$$(3) f(x + iy) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} + i(1 + xy).$$

Решење. (1) Важи

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{\operatorname{Re}((x + iy)^2)}{|x + iy|^2} = \frac{\operatorname{Re}(x^2 + 2xiy - y^2)}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{0}_{v(x,y)}.$$

Видимо да је $u(0, y) = -1$ и $u(x, 0) = 1$, па $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ не постоји, те не постоји ни $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.

(2) У овом примеру је

$$f(z) = \frac{(x + iy)^2}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\frac{2xy}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)},$$

па пошто, као у претходном примеру, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y)$ не постоји, то не постоји ни $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$.

(3) Нека је $u(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. Видимо да важи

$$0 \leq \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2|x|}{x^2 + y^2} + \frac{y^2|y|}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0),$$

одакле закључујемо да је $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = 0$.

□

Извод функције комплексне променљиве

Извод функције комплексне променљиве се дефинише аналогно изводу функције реалне променљиве: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, ако та гранична вредност постоји. Ако постоји извод функције f у тачки $z = z_0$, онда кажемо да је функција f диференцијабилна у тој тачки.

Ако је функција $f : z = x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$, тада постоје парцијални изводи функција u и v у тачки (x_0, y_0) и важе тзв. Коши-Риманови услови:

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0).$$

Обрнуто, ако су u и v диференцијабилне у тачки (x_0, y_0) и у тој тачки су испуњени Коши-Риманови услови, тада је функција $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ диференцијабилна у тачки $x_0 + iy_0$.

Правила диференцирања (извод збира, производа, ...) и даље важе, као и таблица извода елементарних функција, те је и даље $(z^a)' = az^{a-1}$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$ итд. Имамо да је испуњено и $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$ и $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$ што се непосредно проверава из дефиниција ових функција.

За функцију кажемо да *аналитичка (регуларна/холоморфна)* у тачки $z = z_0$ ако је диференцијабилна у z_0 и некој околини тачке z_0 . Нека су f и g две аналитичке функције у тачки $z = z_0$ такве да је $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Ако је $g'(z_0) \neq 0$, тада важи аналогон Лопиталовог правила за функције комплексне променљиве:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

ако лимес на десној страни постоји.

11. Испитати диференцијабилност функције $f(z)$ у тачки $z = 0$, ако је:

(1) $f(z) = |z|\operatorname{Re} z$;

(2) $f(z) = \bar{z}$.

Решење. (1) Важи

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} &= \lim_{x+iy \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x\sqrt{x^2+y^2}(x-iy)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - i \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \end{aligned}$$

јер је

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0,$$

односно

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \rightarrow 0, \quad (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Дакле, функција из овог примера јесте диференцијабилна у тачки $z = 0$.

(2) Ако у $f(x + iy) = x - iy$ означимо $u(x, y) = x$ и $v(x, y) = -y$, онда због $u'_x \neq v'_y$ закључујемо да функција f није диференцијабилна у $z = 0$. $\square$

12. Испитати регуларност функције $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ако је $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$.

Решење. Свака основна елементарна функција је аналитичка у својој области дефинисаности.

Стога, функција $f(z)$ је регуларна за $z \neq 0$. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}}{z} = \frac{z - \sin z}{z^2 \sin z} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{\lim_{z \rightarrow 0}}} \frac{1 - \cos z}{2z \sin z + z^2 \cos z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2 \sin z + 4z \cos z - z^2 \sin z} = \frac{\frac{0}{0}}{\underset{\text{л.п.}}{\lim_{z \rightarrow 0}}} \frac{\cos z}{6 \cos z - 6z \sin z - z^2 \cos z} = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

па функција има извод у $z = 0$. Следи да је дата функција регуларна у целој комплексној равни. $\square$

13. Нека је $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичка за $x \neq 0$. Одредити $v(x, y)$ ако је $u(x, y) = \ln |z|^2$.

Решење. Пре свега, важи

$$u(x, y) = \ln |x + iy|^2 = \ln(x^2 + y^2),$$

одакле је

$$u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \text{ и } u'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

На основу Коши-Риманових услова је $v'_y = u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, одакле је

$$v(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dy = 2x \cdot \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} + \varphi(x) = 2 \arctg \frac{y}{x} + \varphi(x).$$

Одатле добијамо да је

$$v'_x = 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \varphi'(x) = -\frac{2y}{x^2 + y^2} + \varphi'(x).$$

Из Коши-Риманових услова је $v'_x = -u'_y$, одакле је $\varphi'(x) = 0$, односно $\varphi(x) = C$, па је

$$v(x, y) = 2 \arctg \frac{y}{x} + C.$$

$\square$

14. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ такве да је $v(x, y) = e^x \sin y + \cos x \operatorname{sh} y$.

Решење. Имамо да је $v'_x = e^x \sin y - \sin x \operatorname{sh} y$ и $v'_y = e^x \cos y + \cos x \operatorname{ch} y$. Из Коши-Риманових услова је $u'_x = e^x \cos y + \cos x \operatorname{ch} y$, одакле је

$$u(x, y) = \int (e^x \cos y + \cos x \operatorname{ch} y) dx = e^x \cos y + \sin x \operatorname{ch} y + \varphi(y).$$

Сада је $u'_y = -e^x \sin y + \sin x \operatorname{sh} y + \varphi'(y)$, па пошто из Коши-Риманових услова важи $u'_y = -v'_x$, то једноставно добијамо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = C$.

Дакле,

$$(1) \quad f(z) = f(x + iy) = e^x \cos y + \sin x \operatorname{ch} y + i(e^x \sin y + \cos x \operatorname{sh} y) + C.$$

Циљ нам је да изразимо f само преко z , за шта ће нам бити потребна одређена умешност у сређивању израза:

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^x(\cos y + i \sin y) + \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y + C \\
&= e^x \cdot e^{iy} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} + C \\
&= e^{x+iy} + \frac{1}{4i} ((e^{ix} - e^{-ix})(e^y + e^{-y}) - (e^{ix} + e^{-ix})(e^y - e^{-y})) + C \\
&= e^z + \frac{1}{2i} (e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^y) = e^z + \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} + C \\
&= e^z + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + C = e^z + \sin z + C.
\end{aligned}$$

НАПОМЕНА: Пошто је у (1) за $z = x \in \mathbb{R}$, односно $y = 0$, испуњено $f(x) = e^x + \sin x + C$, и функција f је цела, то се може закључити да је $f(z) = e^z + \sin z + C$. $\square$

15. Одредити све аналитичке функције $f : x + iy \mapsto u + iv$ такве да је $u(x, y) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$.

Решење. Важи

$$u'_x = \frac{2 \cos 2x (\cos 2x + \operatorname{ch} 2y) - \sin 2x (-2 \sin 2x)}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} = \frac{2 + 2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2},$$

и

$$u'_y = \frac{-\sin 2x}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} \cdot 2 \operatorname{sh} 2y = \frac{-2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2}.$$

Из Коши-Риманових услова је $v'_x = -u'_y$, одакле је

$$v(x, y) = - \int \frac{-2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} dx = - \operatorname{sh} 2y \int \frac{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)'_x dx}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + \varphi(y).$$

Даље, из Коши-Риманових услова је

$$\begin{aligned}
u'_x = v'_y &= \frac{2 \operatorname{ch} 2y (\cos 2x + \operatorname{ch} 2y) - \operatorname{sh} 2y \cdot 2 \operatorname{sh} 2y}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} + \varphi'(y) \\
&= \frac{2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + 2(\operatorname{ch}^2 2y - \operatorname{sh}^2 2y)}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} + \varphi'(y) = \frac{2 \cos 2x \operatorname{ch} 2y + 2}{(\cos 2x + \operatorname{ch} 2y)^2} + \varphi'(y) = u'_x + \varphi'(y),
\end{aligned}$$

одакле закључујемо да је $\varphi'(y) = 0$, односно $\varphi(y) = C$. Дакле, важи

$$f(x + iy) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + i \left(\frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + C \right) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + Ci.$$

Ако се присетимо 9. задатка и адиционих формула, имаћемо да је

$$f(x + iy) = \frac{\sin 2x + \sin 2iy}{\cos 2x + \cos 2iy} + Ci = \frac{2 \sin(x + iy) \cos(x - iy)}{2 \cos(x + iy) \cos(x - iy)} + Ci = \operatorname{tg}(x + iy) + Ci,$$

односно $f(z) = \operatorname{tg} z + Ci$. $\square$

Интеграл функције комплексне променљиве

За функцију $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ дату са $f(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in [a, b]$, интеграл се дефинише као

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt,$$

где су u и v две интеграбилне функције на $[a, b]$. Ако је γ глатка крива у комплексној равни, дата са $\gamma = \{z(t) \mid z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]\}$ и f непрекидна комплексна функција дефинисана на γ , тада се интеграл функције f дуж криве γ дефинише као

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Ако су f и g интеграбилне дуж криве γ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тада важи

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz.$$

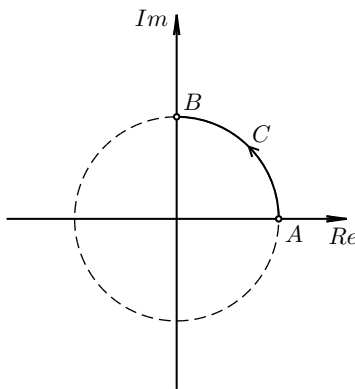
Ако је функција f интеграбилна на кривама γ_1 и γ_2 , и при томе се крај криве γ_1 поклапа са почетком криве γ_2 , тада је

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

У задацима ћемо увек имати прецизирану оријентацију криве дуж које се одређује вредност интеграла. Уколико је крива која је дата нека контура C која ограничава област D , онда је позитивна оријентација она оријентација таква да кад „обилазимо“ контуру, област D увек остаје са леве стране. Супротна оријентација је негативна. Промена оријентације криве мења знак интеграла.

1. Израчунати $\int_{C^+} \operatorname{Im}(z) dz$, где је $C = \{z \mid z = 3e^{it}, t \in [0, \pi/2]\}$.

Решење. Дата крива C је означена на слици:



Ако је $z = x + iy$, тада је $x = 3 \cos t$ и $y = 3 \sin t$, односно $dz = (-3 \sin t + i \cdot 3 \cos t) dt$ и $\operatorname{Im}(z) = 3 \sin t$, одакле је

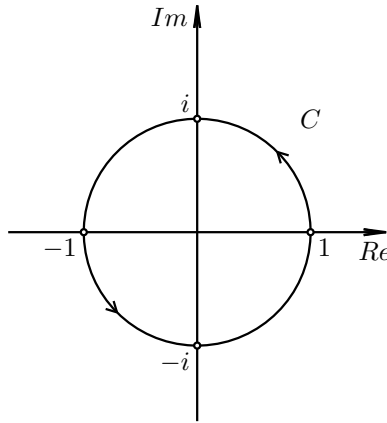
$$\begin{aligned} \int_{C^+} \operatorname{Im}(z) dz &= \int_{\widehat{AB}} \operatorname{Im}(z) dz = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cdot 3(-\sin t + i \cos t) dt \\ &= 9 \left(- \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + i \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt \right) \\ &= 9 \left(- \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} \right) dt + i \int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) \right) \\ &= 9 \left(- \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} + i \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = 9 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \right). \end{aligned}$$

□

2. Израчунати $\int_{C^+} (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)) dz$, где је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење. Важи $C = \{e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$, па из $z = \cos t + i \sin t$ следи $dz = (-\sin t + i \cos t) dt$. Даље је

$$\begin{aligned} \int_{C^+} (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)) dz &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)(-\sin t + i \cos t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + i \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + i \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt \\ &= - \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{i}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} + i \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\pi(-1 + i). \end{aligned}$$



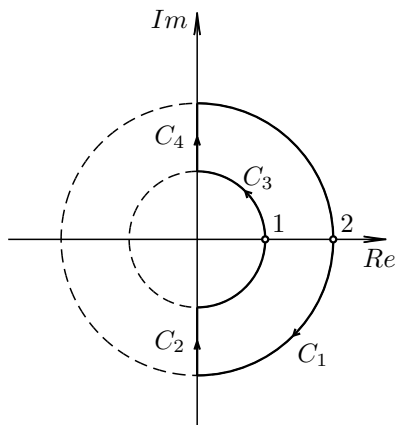
□

3. Израчунати $\int_{C^-} \frac{\bar{z}}{z} dz$, где је $C = \{z \mid 1 < |z| < 2, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Решење. Криву C ћемо изделити на четири дела, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, као на слици. Одатле ће важити

$$\int_{C^-} \frac{\bar{z}}{z} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

при чему ћемо интеграле $I_1, \dots, I_4$ одредити у наставку.



1. C_1 : Овде ћемо криву параметризовати као да је оријентација позитивна, па ћемо то касније контролисати знаком минус испред интеграла. Важи $z = 2e^{it}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, одакле је $dz = 2ie^{it}$, $\bar{z} = 2e^{-it}$, па имамо да је

$$I_1 = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2e^{-it}}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it} dt = -2i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i \sin t) dt = -2i(\sin t + i \cos t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -4i.$$

2. C_2 : Важи $z = it$, $t \in [-2, -1]$, одакле је $dz = i dt$, $\bar{z} = -it$. Даље је

$$I_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{-it}{it} \cdot i dt = -i \int_{-2}^{-1} dt = -i.$$

3. C_3 : $z = e^{it}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, одакле је $dz = ie^{it} dt$ и $\bar{z} = e^{-it}$, па је

$$I_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-it}}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t - i \sin t) dt = i(\sin t + i \cos t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2i.$$

4. C_4 : Важи $z = it$, $t \in [1, 2]$, па је, као у другом случају,

$$I_4 = \int_1^2 \frac{-it}{it} \cdot i dt = -i \int_1^2 dt = -i.$$

Коначно, важи

$$\int_{C^-} \frac{\bar{z}}{z} dz = -4i - i + 2i - i = -4i$$

□

4. Израчунати $\int_{C^+} \operatorname{Re}(z) dz$, ако је C граница области $D = \{x + iy \mid x^2 + y^2 < -2x, x^2 + y^2 < 2y\}$.

Решење.

Видимо најпре да је

$$x^2 + y^2 < -2x \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 < 1,$$

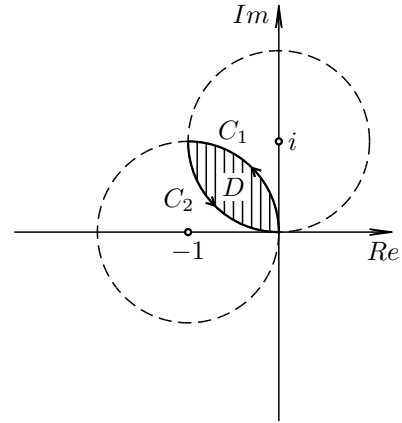
односно

$$x^2 + y^2 < 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 < 1.$$

Област D је означена на слици. Границу C можемо поделити на два дела, $C = C_1 \cup C_2$, тако да је

$$I = \int_{C^+} \operatorname{Re}(z) dz = I_1 + I_2,$$

где су I_1 и I_2 вредности интеграла дуж крива C_1 и C_2 .



1. C_1 : Имамо да је $x = -1 + \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, односно $z = -1 + \cos t + i \sin t$, одакле је $dz = (-\sin t + i \cos t) dt$ и $\operatorname{Re}(z) = -1 + \cos t$. Одатле следи

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} (-1 + \cos t)(-\sin t + i \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - \sin t \cos t - i \cos t + i \cos^2 t) dt \\ &= \left(-\cos t - \frac{\sin^2 t}{2} - i \sin t + \frac{i}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + i \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \end{aligned}$$

2. C_2 : Важи $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, односно $z = \cos t + i(1 + \sin t)$, $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, одакле је $dz = (-\sin t + i \cos t) dt$ и $\operatorname{Re}(z) = -\cos t$, па важи

$$(2) \quad I_2 = \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos t (-\sin t + i \cos t) dt = \left(-\frac{\sin^2 t}{2} + \frac{i}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right) \Big|_{\pi}^{3\pi/2} = \frac{1}{2} + i \frac{\pi}{4}.$$

На основу претходних резултата, добијамо да је

$$I = I_1 + I_2 = 1 + i \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

□

Сингуларне тачке комплексне функције и резидууми

Тачке у којима функција $f(z)$ није аналитичка називају се **сингуларним** тачкама. Тачка z_0 је изолована сингуларна тачка или *изоловани сингуларитет* функције $f(z)$ ако је та функција аналитичка у свим тачкама неке околине тачке z_0 сем у самој тачки z_0 . Изоловани сингуларитет z_0 је:

- *отклоњив сингуларитет* ако је $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \neq \infty$;
- *пол* ако је $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;
- *есенцијални сингуларитет* ако $\lim_{z \rightarrow z_0}$ не постоји.

Пол z_0 је пол реда n ако је $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = w_0 \neq 0$. Пол 1. реда се назива и *простим* полом.

Нека је z_0 изоловани сингуларитет функције $f(z)$. Резидуум функције $f(z)$ у тачки z_0 се дефинише као

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z) dz,$$

где је C контура која ограничава област у којој се налази тачка z_0 , а $f(z)$ је аналитичка у свим тачкама неке области која садржи C , сем у тачки z_0 . Из претходне формуле директно следи да је

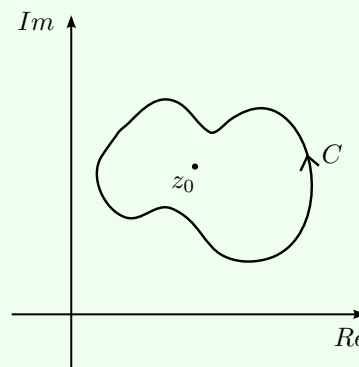
$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z).$$

Важи и општије од претходног: Ако су $z_1, \dots, z_n$ сви сингуларитети из области коју ограничава контура C , тада је

$$\int_{C^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

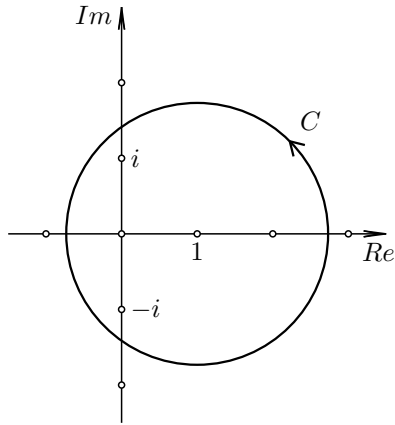
Видимо да нам претходна формула омогућава да израчунамо неке интеграле функције комплексне променљиве преко резидуума. Било би zgodно ако бисмо могли некако и саме резидууме да рачунамо. На срећу, можемо:

- Ако је z_0 отклоњив сингуларитет, онда је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$;
 - Ако је z_0 пол реда n , онда је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)}$.
- Специјално, за $n = 1$ је $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.



5. Израчунати $\int_{C^+} \frac{z dz}{(z^2 - 1)^2(z^2 + 1)}$, ако је $C = \{x + iy \mid x^2 + y^2 = 2x + 2\}$.

Решење. Најпре, из $x^2 + y^2 = 2x + 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 3$ закључујемо да је C кружница у комплексној равни као на датој слици.



Видимо да функција $f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)^2(z^2 + 1)}$ има сингуларитете у тачкама $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ и $z_4 = -1$, међутим, тачка z_4 не припада делу равни ограниченом контуром C . За преостале тачке је јасно да су у питању полови.

1° Важи $\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z - 1)(z + 1)^2(z^2 + 1)} = \infty$, па тачка $z_1 = 1$ није пол 1. реда. Са друге стране, из

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z + 1)^2(z^2 + 1)} = \frac{1}{8} \neq 0,$$

слиди да је $z_1 = 1$ пол 2. реда. Резидуум рачунамо по формули:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \frac{1}{(2 - 1)!} \lim_{z \rightarrow 1} ((z - 1)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z}{(z + 1)^2(z^2 + 1)} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(z + 1)^2 - (z^2 + 1)}{(z + 1)^2(z^2 + 1)} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z^2 + 1} - \frac{1}{(z + 1)^2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left(-\frac{2z}{(z^2 + 1)^2} + \frac{2}{(z + 1)^3} \right) = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2° Важи $\lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{(z^2 - 1)^2(z + i)} = \frac{i}{4 \cdot 2i} = \frac{1}{8} \neq 0$, одакле закључујемо да је $z_2 = i$ пол 1. реда и важи $\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{8}$.

3° Важи $\lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z^2 - 1)^2(z - i)} = \frac{-i}{4 \cdot (-2i)} = \frac{1}{8} \neq 0$, одакле закључујемо да је $z_3 = -i$ пол 1. реда и важи $\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{8}$.

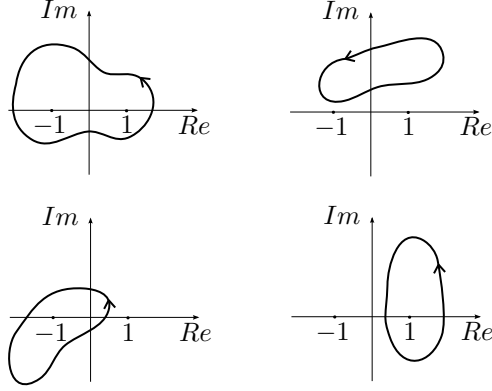
На основу претходног закључујемо да важи

$$\int_{C^+} \frac{z \, dz}{(z^2 - 1)^2(z^2 + 1)} = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z) + \operatorname{Res} f(z) \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi i}{4}.$$

□

6. Израчунати $\int_{C^+} \frac{z^2 \, dz}{(z^2 - 1)(z - 1)^2}$, ако је C контура која не садржи тачке 1 и -1 .

Решење. Сингуларне тачке подинтегралне функције $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ су $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. У зависности од саме контуре, свака од тих тачака може али и не мора припадати области D коју затвара контура C . Могуће ситуације су представљене на слици.



Свакако је јасно да су обе тачке полови, па ћемо најпре да одредимо резидууме за обе тачке.

1° $z_1 = 1$: Важи

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

одакле следи да је $z_1 = 1$ пол 3. реда. Стога, имамо да је

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1)^3 \cdot \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^2}{z+1} \right)'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z+1)^3} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2° $z_2 = -1$: На основу

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{8} \neq 0$$

следи да је $z_2 = -1$ пол 1. реда, те је $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{8}$.

За вредност траженог интеграла сада разликујемо следећа четири случаја, у складу са дискусијом са почетка решење:

1. $z_1, z_2 \in D$: На основу Кошијеве теореме о резидуумима, важи

$$\int_{C^+} \frac{z^2 dz}{(z^2-1)(z-1)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) = 0.$$

2. $z_1, z_2 \notin D$: У овом случају (на основу Кошијеве теореме) вредност интеграла је 0.

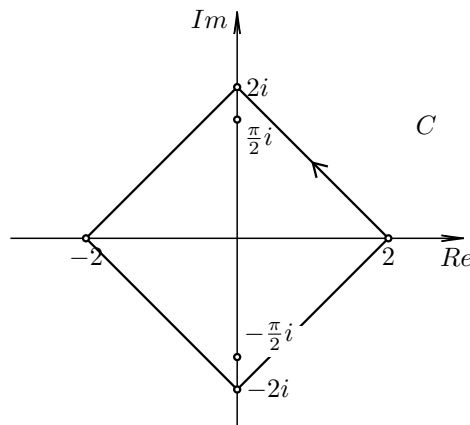
3. $z_1 \notin D, z_2 \in D$: Сада је $\int_{C^+} \frac{z^2 dz}{(z^2-1)(z-1)^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{8} \right) = -\frac{\pi i}{4}$.

4. $z_1 \in D, z_2 \notin D$: Сада је $\int_{C^+} \frac{z^2 dz}{(z^2-1)(z-1)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{\pi i}{4}$.

□

7. Израчунати $\int_{C^+} \frac{e^z dz}{\operatorname{ch} z}$, ако је $C = \{x + iy \mid |x| + |y| = 2\}$.

Решење. Одредимо прво сингуларне тачке: Из $\operatorname{ch} z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0$ добијамо да је $e^{2z} = -1$, одакле је $2z = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, односно $z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Области D коју затвара крива C припадају тачке $z_1 = \frac{\pi}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\pi}{2}i$.



Обе тачке су полови првог реда јер важи

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}i} \left(z - \frac{\pi}{2}i\right) f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z} \cdot e^z = i \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z} \stackrel{0}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} i \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}i} \frac{1}{\operatorname{sh} z} = 1,$$

односно

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}i} \left(z + \frac{\pi}{2}i\right) f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}i} \frac{z + \frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z} \cdot e^z = -i \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}i} \frac{z + \frac{\pi}{2}i}{\operatorname{ch} z} \stackrel{0}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} -i \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}i} \frac{1}{\operatorname{sh} z} = 1,$$

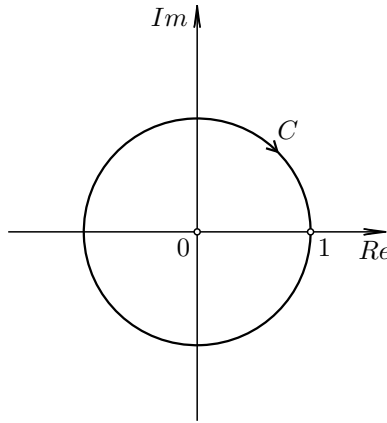
па важи $\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}i} f(z) = \operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}i} f(z) = 1$, односно $\int_{C^+} \frac{e^z dz}{\operatorname{ch} z} = 2\pi i(1 + 1) = 4\pi i$. $\square$

8. Израчунати $\int_{C^-} \frac{dz}{z^2 \sin z}$, ако је $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Решење. Најпре, имамо

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2iz = \operatorname{Ln}(1) = \ln 1 + i\operatorname{Arg}(1) = i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

па добијамо да је $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Једино $z = 0$ припада области коју затвара контура C , и то је уједно и једина сингуларна тачка дате функције у тој области.



Тачка $z = 0$ је пол 3. реда, јер важи

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1 \neq 0,$$

а за резидуум важи

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\sin z} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin^2 z + 2z \cos^2 z - 2 \sin z \cos z}{\sin^3 z} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(1 + \cos^2 z) - 2 \sin z \cos z}{\sin^3 z} = \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3z + z \cos 2z - 2 \sin 2z}{\sin^3 z} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{4} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3 + \cos 2z - 2z \sin 2z - 4 \cos 2z}{3 \sin^2 z \cos z} = \frac{1}{12} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 2z - 2z \sin 2z}{\sin^2 z \cos z} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{12} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{6 \sin 2z - 2 \sin 2z - 4z \cos 2z}{2 \sin z \cos^2 z - \sin^3 z} = \frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 2z - z \cos 2z}{2 \sin z \cos^2 z - \sin^3 z} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2z - \cos 2z + 2z \sin 2z}{2 \cos^3 z - 4 \sin^2 z \cos z - 3 \sin^2 z \cos z} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Сада директно следи да је $\int_{C^-} \frac{dz}{z^2 \sin z} = -2\pi i \cdot \frac{1}{6} = -\frac{\pi i}{3}$. □

9. Израчунати $\int_{C^+} \frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$, ако је $C = \{z \mid |z + 1| = \sqrt{2}\}$.

Решење. Сингуларне тачке подинтегралне функције $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 \cos z}$ добијамо из услова $z^3 \cos z = 0$. Имамо $z_1 = 0$, док остале тражимо из услова $\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1$, одакле је $z = \frac{1}{2}(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Нова сингуларна тачка која припада области коју затвара контура C је $z_2 = -\frac{\pi}{2}$. Обе тачка су полови (зашто?), при чему је $z_1 = 0$ пол 2. реда:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{\cos z} = 1 \neq 0.$$

Даље је

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} z}{z^3} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z \cos z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z \cos z}{z^2 \cos^2 z} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Л.П.}}{\lim_{z \rightarrow 0}}} \frac{\sin^2 z}{z \cos^2 z - z^2 \frac{\sin 2z}{2}} = \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Л.П.}}{\lim_{z \rightarrow 0}}} \frac{2 \sin z \cos z}{\cos^2 z - 2z \sin z \cos z - z \sin 2z - z^2 \cos 2z} = 0. \end{aligned}$$

Тачка $z_2 = -\frac{\pi}{2}$ је пол 1. реда јер је испуњено

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \left(z + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\operatorname{tg} z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{z^3} \cdot \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\cos z} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Л.П.}}{\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}}}} \frac{8}{\pi^3} \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z} = \frac{8}{\pi^3} \neq 0,$$

па је и $\operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{8}{\pi^3}$.

Коначно, вредност траженог интеграла је

$$\int_{C^+} \frac{\operatorname{tg} z}{z^3} = 2\pi i \left(0 + \frac{8}{\pi^3} \right) = \frac{16i}{\pi^2}.$$

□

