

Лапласова трансформација

Лапласовом трансформацијом $\mathcal{L}$ се функцији $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (оригинал) придружује функција $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (слика) која се дефинише као

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

при чему је функција F дефинисана за свако $s \in \mathbb{C}$ за које претходни несвојствени интеграл конвергира. Уколико тај интеграл не конвергира ни за једно $s \in \mathbb{C}$, кажемо да не постоји Лапласова слика функције $f(t)$.

Теорема: Ако је $f(t)$ дефинисана на $[0, +\infty)$, има највише коначно много прекида прве врсте на сваком подинтервалу од $[0, +\infty)$ и ако постоје константе M и a такве да је $|f(t)| < Me^{at}$, $t \geq 0$, тада интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ конвергира, односно $\mathcal{L}(f(t))$ постоји, за свако s такво да је $\operatorname{Re} s > a$. Штавише, функције $F(s)$ је тада аналитичка у полуравни $\operatorname{Re} s > a$.

Особине Лапласове трансформације

Нека су $f(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ оригинали и $F(s)$, $F_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ њихове слике добијене Лапласовом трансформацијом. Тада важи:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^n c_i F_i(s), \\ f(at) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0, \\ e^{at} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a), \\ f(t-a) &\xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s), \\ tf(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} -F'(s), \\ t^n f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(s), \\ \frac{f(t)}{t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^{\infty} F(p) dp, \\ \int_0^{\infty} f(t) dt &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}, \\ f'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - F(0), \\ f^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Битна операција коју ћемо дефинисати је операција конволуције две функције:

$$(f_1 * f_2)(t) = f_1(t) * f_2(t) := \int_0^t f_1(t-x) f_2(x) dx,$$

и значајна особина Лапласове трансформације је у вези са конволуцијом:

$$(f_1 * f_2)(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) \cdot F_2(s).$$

Основне Лапласове трансформације које ћемо користити у даљем раду су:

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \\ t^n &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad n \in \mathbb{N} \\ e^{at} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > a, \\ \sin at &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \\ \cos at &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

1. Одредити $\mathcal{L}(f)$ ако је:

а) $f(t) = \operatorname{sh} at$,

б) $f(t) = \operatorname{ch} at$.

Решење. Користећи дефиницију хиперболичког синуса и косинуса, добијамо да је

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2},$$

односно

$$\operatorname{ch} at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} = \frac{1}{2}e^{at} + \frac{1}{2}e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

□

2. Одредити $\mathcal{L}(f)$ ако је $f(t) = \cos^3 t$.

Решење. Важи

$$\begin{aligned} \cos^3 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + 3e^{2it} \cdot e^{-it} + 3e^{it} \cdot e^{-2it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8} \left(2 \cdot \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \frac{1}{8} (2 \cos 3t + 6 \cos t) \\ &= \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t, \end{aligned}$$

одакле је $\mathcal{L}(\cos^3 t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}.$

□

3. Одредити $\mathcal{L}(f)$ ако је $f(t) = e^{-t} \cos^2 t$.

Решење. Ако је $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, тада из особина Лапласове трансформације знамо да важи $e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-a)$, па треба најпре одредити $\mathcal{L}(\cos^2 t)$. Важи

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)},$$

$$\text{одакле је } \mathcal{L}(e^{-t} \cos^2 t) = \frac{(s+1)^2 + 2}{(s+1)((s+1)^2 + 4)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)}.$$

□

4. Одредити $\mathcal{L}(f)$ ако је $f(t) = t^2 \sin at$.

Решење. Ако је $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, тада из особина Лапласове трансформације знамо да важи $t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n F^{(n)}(s)$, па је

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2 \sin at) &= \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right)'' = a \left(\frac{-2s}{(s^2 + a^2)^2} \right)' \\ &= -2a \cdot \frac{(s^2 + a^2)^2 - s \cdot 2(s^2 + a^2) \cdot 2s}{(s^2 + a^2)^4} = \frac{-2a(a^2 - 3s^2)}{(s^2 + a^2)^3}. \end{aligned}$$

□

5. Одредити $\mathcal{L}(f)$ ако је $f(t) = \frac{e^{-at}}{t} \sin bt$.

Решење. Одредимо најпре $\mathcal{L}\left(\frac{\sin bt}{t}\right)$: Ако је $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, тада из особина Лапласове трансформације знамо да важи $\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty F(z) dz$, па имамо

$$\frac{\sin bt}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty \frac{b}{z^2 + b^2} dz = b \cdot \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{z}{b} \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{b},$$

$$\text{одакле је } \mathcal{L}\left(e^{-at} \frac{\sin bt}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s+a}{b}.$$

□

6. Одредити $\mathcal{L}(f)$ ако је:

а) $f(t) = \int_0^t (t-x)e^x dx,$

б) $f(t) = \int_0^t \cos(t-x) \cos x dx,$

в) $f(t) = \int_0^t \sin x dx.$

Решење. Сва три примера ћемо решавати користећи Лапласову трансформацију за конволуцију две функције:

а)

$$f(t) = t * e^t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(t) \cdot \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1};$$

б)

$$f(t) = \cos t * \cos t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(\cos t) \cdot \mathcal{L}(\cos t) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2};$$

в)

$$f(t) = \int_1^t 1 \cdot \sin x \, dx = 1 * \sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}(1) \cdot \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}.$$

□

У наредним задацима ћемо одређивати оригинале знајући слике добијене Лапласовом трансформацијом, односно одређиваћемо инверзну Лапласову трансформацију задатих функције.

Пример: Знамо да је $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1}$, па је $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \sin t$.

7. Одредити $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 4}\right)$.

Решење. Пошто важи $\sin at \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{s^2 + a^2}$, то је

$$\frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} \sin 2t.$$

□

8. Одредити $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 6s + 13}\right)$.

Решење. Користимо својство $e^{at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$:

$$\frac{1}{s^2 + 6s + 13} = \frac{1}{(s + 3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s + 3)^2 + 4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} e^{-3t} \sin 2t.$$

□

9. Одредити $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 4)}\right)$.

Решење. Урадићемо задатак на два начина:

1. Начин: Искористимо особину конволуције:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2+4)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{2} \mathcal{L}(1) \cdot \mathcal{L}(\sin 2t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} (1 * \sin 2t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{1 - \cos 2t}{4}.\end{aligned}$$

2. Начин: Присетимо се метода неодређених коефицијената, којег смо користили у раду са интегралима: Из

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

добивамо да мора важити $1 = (A+B)s^2 + Cs + 4A$, одакле имамо систем

$$\left. \begin{array}{rcl} A + B & = & 0 \\ C & = & 0 \\ 4A & = & 1 \end{array} \right\},$$

који се једноставно решава и чије је решење $(A, B, C) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0)$. Дакле, важи

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t.$$

□

10. Одредити $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$, ако је $F(s) = \frac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)}$.

Решење. Из

$$\frac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5}$$

добивамо да важи

$$2s-3 = (A+B)s^2 + (4A-B+C)s + 5A-C,$$

односно имамо систем једначина

$$\left. \begin{array}{rcl} A + B & = & 0 \\ 4A - B + C & = & 2 \\ 5A - C & = & -3 \end{array} \right\},$$

чијим решавањем добијамо да је $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{1}{10}$ и $C = \frac{5}{2}$. Дакле, важи

$$\begin{aligned}\frac{2s-3}{(s-1)(s^2+4s+5)} &= -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{\frac{1}{10}s + \frac{5}{2}}{(s+2)^2+1} \\ &= -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{10} \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{1}{10} e^t + \frac{1}{10} e^{-2t} \cos t + \frac{23}{10} e^{-2t} \sin t.\end{aligned}$$

□

11. Одредити $\mathcal{L}^{-1}(X(s))$, ако је $X(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 - 1}$.

Решење. Најпре, важи $s^3 - 1 = (s - 1)(s^2 + s + 1)$, па из

$$\frac{s^2 + 1}{(s - 1)(s^2 + s + 1)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1}$$

добијамо да је

$$s^2 + 1 = (A + B)s^2 + (A - B + C)s + A - C,$$

те имамо систем

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - B + C &= 0 \\ A - C &= 1 \end{aligned} \right\},$$

чије је решење $(A, B, C) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Даље је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{s - 1}{s^2 + s + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{s + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t. \end{aligned}$$

□

12. Одредити $\mathcal{L}^{-1}(Y(s))$, ако је $Y(s) = \frac{1}{s^3(s - 1)}$.

Решење. Из $\frac{1}{s^3(s - 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s - 1}$ добијамо систем

$$\left. \begin{aligned} A &+ D = 0 \\ -A + B &= 0 \\ -B + C &= 0 \\ -C &= 1 \end{aligned} \right\},$$

одакле је $(A, B, C, D) = (-1, -1, -1, 1)$. Ако искористимо особину $\frac{1}{s^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{n!}{s^{n+1}}$, онда је

$$Y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s - 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t.$$

□

Примена Лапласове трансформације

У наредним задацима ћемо примењивати Лапласову трансформацију у решавању диференцијалних једначина и система диференцијалних једначина (бавићемо се још и такозваним интегралним једначинама). Идеја је да Лапласовом трансформацијом преведемо дату једначину у алгебарску, која је знатно једноставнија за решавање. Након што одредимо њено решење, искористићемо инверзну Лапласову трансформацију да бисмо одредили решење почетног проблема. Подсетимо се да, ако је $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} F(s)$, онда је $f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.

1. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 5t + 1$$

које задовољава услов $y(0) = 2$ и $y'(0) = 2$.

Решење. Ако је $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$, тада имамо

$$\begin{aligned} y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) &= 5t + 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \Rightarrow s^2 Y(s) - 2s - 2 - 4(sY(s) - 2) + 5Y(s) &= \frac{5}{s^2} + \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow (s^2 - 4s + 5)Y(s) &= \frac{5}{s^2} + \frac{1}{s} + 2s - 6 \\ \Leftrightarrow (s^2 - 4s + 5)Y(s) &= \frac{2s^3 - 6s^2 + s + 5}{s^2}. \end{aligned}$$

Даље, из

$$Y(s) = \frac{2s^3 - 6s^2 + s + 5}{s^2(s^2 - 4s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 4s + 5}$$

добивамо систем линеарних једначина

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & C = 2 \\ -4A + B & + & D = -6 \\ 5A - 4B & & = 1 \\ & 5B & = 5 \end{array} \right\},$$

чије је решење $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -3)$. Дакле, важи

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s-3}{s^2-4s+5} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s-2}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{(s-2)^2+1} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 + t + e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t = y(t). \end{aligned}$$

□

2. Применом Лапласове трансформације решити систем диференцијалних једначина

$$\left. \begin{aligned} x'(t) - y(t) &= e^t \\ y'(t) + x(t) &= \sin t \end{aligned} \right\},$$

ако је $x(0) = 1$ и $y(0) = 0$.

Решење. За потребе решавања овог задатка ћемо извести наредне, нешто општије, резултате: Важи

$$(1) \quad t \sin at \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right)' = -a \cdot \frac{-2s}{(s^2 + a^2)} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}.$$

односно

$$t \cos at \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \left(\frac{s}{s^2 + a^2} \right)' = -\frac{s^2 + a^2 - 2s^2}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2},$$

а одатле је

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s^2}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 + a^2 + s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} + \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin at}{a} + t \cos at \right), \end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(s^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2 + a^2 - (s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2} \\ (2) \quad &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin at}{a} - t \cos at \right). \end{aligned}$$

Вратимо се сада задатку. Ако је $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ и $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$, тада ако применимо Лапласову трансформацију на дати систем, добијамо систем

$$\left. \begin{aligned} sX(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ sY(s) - 0 + X(s) &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} sX(s) - Y(s) &= \frac{s}{s-1} \\ X(s) + sY(s) &= \frac{1}{s^2+1} \end{aligned} \right\}.$$

Добијени систем ћемо решавати Крамеровом методом: Важи

$$\Delta = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & -1 \\ \frac{1}{s^2+1} & s \end{vmatrix} = \frac{s^2}{s-1} + \frac{1}{s+1}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} s & \frac{s}{s-1} \\ 1 & \frac{1}{s^2+1} \end{vmatrix} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s-1},$$

одакле је

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2},$$

односно

$$Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{s}{(s^2+1)^2} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}.$$

На основу методе неодређених коефицијената можемо добити да је

$$\frac{s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1},$$

а такође и

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

На основу резултата (1) и (2), важи $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}t \sin t$ и $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$, одакле је

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \\ &= \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{1}{2}t \cos t = x(t), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t \sin t = y(t). \end{aligned}$$

□

3. Решити једначину

$$\int_0^t \sin(t-x)y(x) \, dx = \sin^2 t.$$

Решење. Нека је $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$. Важи

$$\int_0^t \sin(t-x)y(x) \, dx = \sin t * y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2+1}Y(s),$$

као и

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2+4},$$

па деловањем Лапласове трансформације на дату једначину добијамо да је

$$\frac{1}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s(s^2+1)}{s^2+4}.$$

Како је $s^2+1 = s^2+4-3$, то је

$$Y(s) = \frac{s}{2} + \frac{1}{2s} - \frac{s}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t = y(t).$$

□

4. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y = 4 \operatorname{ch} t.$$

Решење. Ако је $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$ и $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$, онда је $y''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 Y(s) - sC_1 - C_2$. Раније смо извели да је $\mathcal{L}(\operatorname{ch} t) = \frac{s}{s^2 - 1}$, па важи

$$\begin{aligned} y'' - y &= 4 \operatorname{ch} t \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \Rightarrow s^2 Y(s) - sC_1 - C_2 - Y(s) &= \frac{4s}{s^2 - 1} \\ \Leftrightarrow Y(s)(s^2 - 1) &= \frac{4s}{s^2 - 1} + sC_1 + C_2 \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{4s}{(s^2 - 1)^2} + \frac{s}{s^2 - 1} C_1 + \frac{1}{s^2 - 1} C_2. \end{aligned}$$

Изведимо опет нешто општије резултате: Важи

$$t \operatorname{ch} at \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \left(\frac{s}{s^2 - a^2} \right)' = -\frac{s^2 - a^2 - 2s^2}{(s^2 - a^2)^2} = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2},$$

односно

$$t \operatorname{sh} at \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1) \left(\frac{a}{s^2 - a^2} \right)' = -a \cdot \frac{-2s}{(s^2 - a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2 - a^2)^2},$$

одакле је $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{4s}{(s^2 - 1)^2} \right) = 2t \operatorname{sh} t$, па је даље

$$Y(t) = \frac{4s}{(s^2 - 1)^2} + \frac{s}{s^2 - 1} C_1 + \frac{1}{s^2 - 1} C_2 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2t \operatorname{sh} t + C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t = y(t).$$

□

5. Решити систем

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= t + \int_0^t y(u) \, du \\ y(t) &= 1 + \int_0^t x(u) \, du \end{aligned} \right\},$$

Решење. Нека је, стандардно, $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ и $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$. Тада је

$$\int_0^t y(u) \, du = \int_0^t 1 \cdot y(u) \, du = 1 * y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} Y(s),$$

и, аналогно, $\mathcal{L} \left(\int_0^t x(u) \, du \right) = \frac{1}{s} X(s)$, па применом Лапласове трансформације на дати систем добијамо

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} Y(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s} X(s) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} s^2 X(s) - s Y(s) &= 1 \\ -X(s) + s Y(s) &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Последњи систем ћемо решавати Крамеровом методом. Имамо да је

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^2 & -s \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^3 - s, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -s \\ 1 & s \end{vmatrix} = 2s, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} s^2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = s^2 + 1,$$

одакле је

$$X(s) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{s^2 - 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2 \operatorname{sh} t = x(t),$$

односно, уз примену методе неодређених коефицијената

$$Y(s) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)} = -\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2 - 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -1 + 2 \operatorname{ch} t = y(t).$$

□

6. Одредити опште решење једначине

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t (t - x + 1)y(x) \, dx = 0.$$

Решење. Нека је $y(0) = C_1$ и $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$. Видимо да важи

$$\int_0^t (t - x + 1)y(x) \, dx = (t + 1) * y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right) Y(s),$$

па имамо

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) + \int_0^t (t - x + 1)y(x) \, dx &= 0 \quad \Big/ \mathcal{L} \\ \Rightarrow sY(s) - C_1 + Y(s) + \frac{s+1}{s^2}Y(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s + 1 + \frac{s+1}{s^2} \right) Y(s) &= C_1 \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{s^2 C_1}{(s+1)(s^2+1)}. \end{aligned}$$

Из

$$\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

добивамо систем

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 1 \\ B + C &= 0 \\ A &+ C = 0 \end{aligned} \right\},$$

одакле је $A = B = \frac{1}{2}$ и $C = -\frac{1}{2}$. Сада имамо да је

$$Y(s) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right) C_1 \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left(\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \right) C_1 = y(t).$$

□

7. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење диференцијалне једначине

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = e^t + 1,$$

за које важи $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ и $y''(0) = 4$.

Решење. Делујући Лапласовом трансформацијом на дату једначину, добијамо да важи

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 \cdot 0 - s \cdot 2 - 4 - 3(s^2 Y(s) - s \cdot 0 - 2) + 3(sY(s) - 0) - Y(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) &= 2s - 2 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow (s-1)^3 Y(s) &= 2(s-1) + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

одакле је

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^3 s}.$$

Из

$$\frac{1}{(s-1)^3 s} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s}$$

добијамо систем

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & D = 0 \\ -2A + B & - & 3D = 0 \\ A - B + C + 3D & = & 0 \\ & - & D = 1 \end{array} \right\},$$

чије је решење $(A, B, C, D) = (1, -1, 1, -1)$. Дакле, важи

$$\frac{1}{(s-1)^3 s} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{s},$$

одакле је

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4} - \frac{1}{s} \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^t + te^t + \frac{t^2}{2}e^t + \frac{t^3}{6}e^t - 1 = y(t). \end{aligned}$$

□