

Системи диференцијалних једначина

Опште решење и први интеграли систем

Општи облик система са n диференцијалних једначина првог реда са n непознатих $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ је дат са

$$\left. \begin{array}{l} F_1(t, x_1, x'_1, \dots, x_n, x'_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x'_1, \dots, x_n, x'_n) = 0 \end{array} \right\}.$$

Уколико је могуће изразити $x'_1, \dots, x'_n$ из система, онда имамо *нормални облик* система:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\}.$$

Пошто је $x'_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dots, x'_n = \frac{dx_n}{dt}$, то се из нормалног облика система може добити и *симетричан облик* система:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)}.$$

Опште решење система је дато са

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1(t, C_1, \dots, C_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t, C_1, \dots, C_n) \end{array} \right\},$$

где су $C_1, \dots, C_n$ реалне константе. Решење може бити дато и преко тзв. *првих интеграла система*, односно у облику

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ \vdots \\ \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = C_n \end{array} \right\},$$

где су $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ функције за које важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_1)'_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_n)'_{x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

1. Систем диференцијалних једначина

$$\left. \begin{array}{l} 2x' - 5y' = 4y - x \\ 3x' - 4y' = 2x - y \end{array} \right\}$$

записати у нормалном и симетричном облику, а затим га свести на диференцијалну једначину другог реда.

Решење. Ако из датог система изразимо x' и y' , добићемо да је

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y \end{cases},$$

што представља нормални облик датог система. Како је $x' = \frac{dx}{dt}$ и $y' = \frac{dy}{dt}$, то је

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{2x - 3y} = dt \\ \frac{dy}{x - 2y} = dt \end{cases},$$

одакле добијамо систем у симетричном облику

$$\frac{dx}{2x - 3y} = \frac{dy}{x - 2y} = \frac{dt}{1}.$$

Одредимо сада одговарајућу диференцијалну једначину другог реда. Ако диференцирамо по t другу једначину у систему у нормалном облику, добићемо да је

$$y'' = x' - 2y' = (2x - 3y) - 2(x - 2y) = y,$$

односно добили смо једначину $y'' - y = 0$. Решење ове једначине је $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Пошто је из система $x = y' + 2y$, то добијамо да је $x(t) = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. □

2. Систем диференцијалних једначина

$$\begin{cases} x'' = 3x - 4y' \\ y'' = 3y + 4x' \end{cases}$$

свести на систем диференцијалних једначина првог реда, а затим и на једначину вишег реда.

Решење. Две диференцијалне једначине другог реда можемо свести на четири диференцијалне једначине првог реда или на једну једначину четвртог реда.

Ако уведемо функције $u = x'$ и $v = y'$, онда се дати систем може свести на систем

$$\begin{cases} x' = u \\ y' = v \\ u' = 3x - 4v \\ v' = 3y + 4u \end{cases},$$

што представља тражени систем једначина првог реда.

Одредимо сада диференцијалну једначину вишег реда: Ако другу једначину датог система диференцирамо два пута добићемо

$$y''' = 3y' + 4x'' = 3y' + 4(3x - 4y') = 12x - 13y',$$

односно

$$y^{(4)} = 12x' - 13y'' = 3(y'' - 3y) - 13y'' = -10y'' - 9y,$$

одакле добијамо једначину

$$y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$$

Решавањем ове једначине долазимо и до решења почетног система, јер имамо да је $12x = y''' + 13y'$. □

3. Свођењем на диференцијалну једначину вишег реда решити систем

$$\left. \begin{aligned} x' &= 1 - \frac{1}{y} \\ y' &= \frac{1}{x-t} \end{aligned} \right\}.$$

Решење. Диференцирањем друге једначине система добијамо

$$y'' = \frac{1-x'}{(x-t)^2} = \frac{1}{(x-t)^2} \cdot (1-x') = (y')^2 \cdot \frac{1}{y},$$

односно имамо једначину другог реда

$$yy'' = (y')^2,$$

којој можемо снизити ред, јер се у једначини не појављује променљива t . Ако уведемо смену $z(y) = y'$, одакле је $y'' = z'z$, добићемо

$$yz'z = z^2 \Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}.$$

Интегралењем једноставно добијамо да је $z = C_1 y$. Враћањем смене добијамо једначину $y' = C_1 y$, одакле је $\frac{dy}{y} = C_1 dt$, па интегралењем добијамо $\ln|y| = C_1 t + C$, односно важи $y = C_2 e^{C_1 t}$. Коначно, из друге једначине добијамо

$$x = t + \frac{1}{y'} = t + \frac{1}{C_1 C_2 e^{C_1 t}}.$$

□

Нелинеарни системи диференцијалних једначина

Решаваћемо систем са n непознатих функција и једном променљивом, који ће нам бити дат у симетричном облику

$$\frac{dx_1}{\psi_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})} = \dots = \frac{dx_n}{\psi_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})} = \frac{dx_{n+1}}{\psi_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}.$$

Решење система ће нам бити дато преко n независних **првих интеграла**

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= C_1 \\ &\vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= C_n \end{aligned} \right\},$$

при чему су ти први интеграла независни ако и само ако важи

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_1)'_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n)'_{x_1} & \cdots & (\varphi_n)'_{x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приликом одређивања првих интеграла биће нам од користи нека знања о размери, нпр. ако је

$$R = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f},$$

онда је и

$$R = \frac{xa}{xb} = \frac{xa \pm yc}{xb \pm yd} = \frac{xa \pm yc \pm ze}{xb \pm yd \pm zf}.$$

Такође, потребно нам је да знамо и неке особине диференцијала, нпр.

$$\begin{aligned} dx + dy &= d(x + y), & x dx + y dy &= \frac{1}{2} d(x^2 + y^2), & y dx + x dy &= d(xy), \\ x^2 dx + y^2 dy &= \frac{1}{3} d(x^3 + y^3), & \frac{y dx - x dy}{y^2} &= d\left(\frac{x}{y}\right), & \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy &= d(\ln(xy)), \dots \end{aligned}$$

4. Доказати да једнакости $x + y + t = C_1$ и $x^2 + y^2 + t^2 = C_2$ представљају независне прве интеграле система

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{t - y}{y - x} \\ y' &= \frac{x - t}{y - x} \end{aligned} \right\}, \quad y \neq x$$

односно представљају решење система.

Решење. Ако прву једначину запишемо као

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t - y}{y - x},$$

имаћемо да је

$$(1) \quad \frac{dx}{t - y} = \frac{dt}{y - x}.$$

Слично, из друге једначина добијамо да је

$$(2) \quad \frac{dy}{x - t} = \frac{dt}{y - x}.$$

На основу (1) и (2), видимо да се дати систем може записати у симетричном облику на следећи начин:

$$\frac{dx}{t - y} = \frac{dy}{x - t} = \frac{dt}{y - x}.$$

Приметимо сада да је

$$\frac{dx + dy}{t - y + x - t} = \frac{dt}{y - x} \Leftrightarrow \frac{d(x + y)}{x - y} = \frac{dt}{y - x},$$

односно

$$d(x + y) = -dt.$$

Интеграљењем добијамо да је

$$x + y = -t + C_1,$$

односно $x + y + t = C_1$, што представља један први интеграл система. Даље, на основу

$$\frac{x dx + y dy}{x(t - y) + y(x - t)} = \frac{dt}{y - x} \Leftrightarrow \frac{x dx + y dy}{t(x - y)} = \frac{dt}{y - x},$$

односно

$$x \, dx + y \, dy = -t \, dt \Leftrightarrow d(x^2 + y^2) = -d(t^2).$$

Интеграљењем је даље

$$x^2 + y^2 = -t^2 + C_2,$$

односно $x^2 + y^2 + t^2 = C_2$, што такође представља први интеграл система, као што је у поставци задатка и најављено. Покажимо да су ови први интеграл међусобно независни: Ако је $\varphi_1(x, y, t) = x + y + t$ и $\varphi_2(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2$, онда из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0,$$

слиеди независност добијених првих интеграла, те они заиста представљају решење датог система. $\square$

5. Налажењем првих интеграла решити систем

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{y}{x-y} \\ y' &= \frac{x}{x-y} \end{aligned} \right\}, \quad x \neq y.$$

Решење. Из прве једначине система добијамо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y} \Leftrightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dt}{x-y},$$

а из друге

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y} \Leftrightarrow \frac{dy}{x} = \frac{dt}{x-y},$$

па закључујемо да се систем може записати у симетричном облику

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dt}{x-y}.$$

На основу

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Leftrightarrow x \, dx = y \, dy,$$

интеграљењем добијамо први интеграл $x^2 - y^2 = C_1$. Такође, из

$$\frac{dy - dx}{x - y} = \frac{dt}{x - y} \Leftrightarrow d(y - x) = dt,$$

добијамо $y - x = t + C_2$ још један први интеграл $y - x - t = C_2$. Ако је $\varphi_1(x, y, t) = x^2 - y^2$ и $\varphi_2(x, y, t) = y - x - t$, тада из

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_x & (\varphi_1)'_y \\ (\varphi_2)'_x & (\varphi_2)'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y) \neq 0,$$

закључујемо да су $\varphi_1 = C_1$ и $\varphi_2 = C_2$ независни први интеграл, те је њима одређено решење датог система. Независност првих интеграла се могла закључити и без рачунања детерминанте: Један аргумент је да су φ_1 и φ_2 полиноми различитих степена, а независност слиеди и из чињенице да се φ_2 зависи од t , док φ_1 не зависи од t . $\square$

6. Решити систем $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy - 2t^2} = \frac{dt}{xt}$.

Решење. Најпре имамо да је

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dt}{xt} \Leftrightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow -\ln|x| + C = \ln|t|,$$

одакле је $\ln|xt| = C$, па добијамо један први интеграл, $xt = C_1$. Даље, из

$$\frac{y dx + x dy}{-yx^2 + x(xy - 2t^2)} = \frac{dt}{xt} \Leftrightarrow \frac{d(xy)}{-2xt^2} = \frac{dt}{xt} \Leftrightarrow d(xy) = -2t dt$$

интеграљењем добијамо $xy = -t^2 + C_2$, односно први интеграл $xy + t^2 = C_2$. Добијени први интеграл су независни јер, нпр. у једном се појављује y а другом не. □

7. Решити систем $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$.

Решење. Са једне стране имамо

$$\frac{dx + dy}{xy - xz + yz - xy} = \frac{dz}{z(x-y)} \Leftrightarrow \frac{d(x+y)}{-z(x-y)} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

одакле је $d(x+y) = -dz$, односно $x+y = -z + C_1$, па је један први интеграл система $x+y+z = C_1$. Са друге стране, из

$$\frac{\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy}{y-z+z-x} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

добијамо да је

$$\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{z} dz \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{1}{z} dz = 0 \Leftrightarrow d(\ln(xyz)) = 0,$$

одакле је $\ln(xyz) = C$, односно $xyz = C_2$, што представља још један први интеграл система. Независност првих интеграла је јасна, јер су $\varphi_1(x, y, z) = x + y + z$ и $\varphi_2(x, y, z) = xyz$ полиноми различитог степена. □

8. Решити систем $\frac{dx}{xz} = -\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$.

Решење. Имамо најпре да важи

$$\frac{dx}{xz} = -\frac{dy}{yz} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln|x| = -\ln|y| + C \Leftrightarrow \ln|xy| = C,$$

одакле закључујемо да је $xy = C_1$ један први интеграл. Добијени резултат ћемо даље користити за добијање још једног првог интеграла: Имамо

$$-\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy} \Leftrightarrow -\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{C_1} \Leftrightarrow -\frac{dy}{y} = \frac{1}{C_1} z dz,$$

одакле, интеграљењем добијамо да је $-\ln|y| + C_2 = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{z^2}{2}$. Заменом $xy = C_1$ даље добијамо везу

$$\frac{z^2}{2xy} + \ln|y| = C_2.$$

Ова два прва интеграла су независна (зашто?) па представљају решење датог система. □

9. Решити систем $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z+u} = \frac{dz}{y+u} = \frac{du}{y+z}.$

Решење. Приметимо да важи

$$\frac{dy - dz}{z + u - y - u} = \frac{dx}{x},$$

одакле је

$$\frac{d(y-z)}{y-z} = \frac{dx}{x},$$

па интеграљењем добијамо

$$\ln|y-z| = -\ln|x| + C \Leftrightarrow \ln|x(y-z)| = C,$$

односно први интеграл $x(y-z) = C_1$. Аналогно, имамо

$$\frac{dz - du}{y + u - y - z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{d(z-u)}{z-u} = -\frac{dx}{x},$$

одакле добијамо први интеграл $x(z-u) = C_2$. Истим резонавањем можемо добити и први интеграл $x(y-u) = C_3$, међутим, ова три прва интеграла нису независна (проверити!). Неопходно је да на неки другачији начин доведемо x, y, z и u у везу. Важи

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy + dz + du}{z + u + y + u + y + z} = \frac{d(y+z+u)}{2(y+z+u)},$$

па интеграљењем добијамо

$$\ln|y+z+u| = 2\ln|x| + C,$$

односно, имамо први интеграл

$$\frac{y+z+u}{x^2} = C_3.$$

За ова три прва интеграла се једноставно утврђује да су независни, па чине решење датог система. □

10. Решити систем $\frac{dx}{x+y-xy^2} = \frac{dy}{x^2y-x-y} = \frac{dz}{y^2-x^2}.$

Решење. Прве интеграле добијамо на следећи начин:

$$\frac{dz}{y^2 - x^2} = \frac{x dx + y dy}{x(x + y - xy^2) + y(x^2y - x - y)} = \frac{\frac{1}{2} d(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$$

одакле је $-2dz = d(x^2 + y^2)$, односно, након интегралења, $x^2 + y^2 + 2z = C_1$. Такође,

$$\frac{dz}{y^2 - z^2} = \frac{y dx + x dy}{y(x + y - xy^2) + x(x^2y - x - y)} = \frac{d(xy)}{(1 - xy)(y^2 - x^2)},$$

одакле је

$$\int \frac{d(xy)}{1 - xy} = \int dz \Leftrightarrow -\ln|1 - xy| + C_2 = z \Leftrightarrow \ln|1 - xy| + z = C_2.$$

Добијени први интеграл су независни, па представљају решење система. $\square$

Системи линеарних диференцијалних једначина

Хомогени системи линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима

Систем линеарних диференцијалних једначина је систем облика

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \right\},$$

или краће

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + B(t),$$

где је

$$X = X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Уколико је $b_1(t) = \dots = b_n(t) = 0$, онда кажемо да је систем хомоген. Ако је $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{const}$, $i, j \in 1, \dots, n$, онда тај систем називамо системом линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Нас ће у наставку управо интересовати хомогени системи линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима, односно системи облика

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = A \cdot X.$$

Ако су позната линеарно независна решења система, $X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$, тада

је опште решење система дато са

$$X(t) = C_1 \cdot X_1(t) + \dots + C_n \cdot X_n(t).$$

Преостаје да опишемо поступак налажења тих n линеарно независних решења $X_1(t), \dots, X_n(t)$:

Нека су $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ решења карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0$. Свакој сопственој вредности одговара једно партикуларно решење, и то на следећи начин:

1. Уколико је λ_i једнострука реална сопствена вредност, тада је $X_i = M \cdot e^{\lambda_i t}$, где је M један сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_i . Њега одређујемо из једначине $(A - \lambda_i I)M = O$.
2. Ако је $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ двострука реална сопствена вредност, тада је $X_i = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda_i t}$ и $X_{i+1} = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda_i t}$, где су (M_1, M_2) нека решења система $\begin{cases} (A - \lambda_i I)M_1 = M_2 \\ (A - \lambda_i I)M_2 = O \end{cases}$. Напоменимо да је потребно одредити два независна решења система, по једно за X_i и X_{i+1} !
3. Ако је λ_i једнострука комплексна сопствена вредност, и $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$, тада је $X_{\text{kom}} = Me^{\lambda_i t}$, одакле су тражена два партикуларна решења дата са $X_i = \text{Re}(X_{\text{kom}})$ и $X_{i+1} = \text{Im}(X_{\text{kom}})$.

1. Решити систем

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 12x - 4y - 12z \\ z' = -4x + y + 5z \end{cases}.$$

Решење. Из датог система следи да је

$$(3) \quad x'' = 2x' - y' - z' = 2(2x - y - z) - (12x - 4y - 12z) - (-4x + y + 5z) = -4x + y + 5z,$$

а одатле и

$$(4) \quad x''' = -4x' + y' + 5z' = -16x + 5y + 17z.$$

Из једнакости (3) и прве једначине система добијамо да важи

$$\begin{cases} y + z = 2x - x' \\ y + 5z = 4x + x'' \end{cases},$$

одакле се једноставно добија да је

$$(5) \quad y = -\frac{1}{4}(5x' + x'' - 6x), \quad z = \frac{1}{4}(x' + x'' + 2x).$$

Заменом овако одређених y и z у (4) добијамо линеарну једначину трећег реда са константним коефицијентима

$$(6) \quad x''' - 3x'' + 2x' = 0.$$

Из карактеристичне једначине која одговара тој диференцијалној једначини, $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, добијамо да је $\lambda \in \{0, 1, 2\}$, одакле закључујемо да је опште решење једначине (6) дато са

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Диференцирањем добијамо да је

$$x' = C_1 e^t + 2C_3 e^{2t},$$

односно

$$x'' = C_2 e^t + 4C_3 e^{2t},$$

па заменом у (5) једноставно добијамо да је

$$y = \frac{3}{2}C_1 - 2C_3e^{2t}, \quad z = \frac{1}{2}C_1 + C_2e^t + 2C_3e^{2t}.$$

Дакле, решење система је дато са

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t} \\ y(t) &= \frac{3}{2}C_1 - 2C_3e^{2t} \\ z(t) &= \frac{1}{2}C_1 + C_2e^t + 2C_3e^{2t} \end{aligned} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. *начин*: Урадићемо задатак и матричном методом, што ће нам убудуће бити први избор за решавање система. Ако је A матрица датог система, тада се из карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 12 & -4-\lambda & -12 \\ -4 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

добијају сопствене вредности $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 2$. Анализирамо сваку сопствену вредност понаособ:

За $\lambda_1 = 0$, сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ одређујемо из једначине $(A - 0 \cdot I)M = O$, односно

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ 12a - 4b - 12c = 0 \\ -4a + b + 5c = 0 \end{cases}.$$

Решење претходног система је $(a, b, c) = (2\alpha, 3\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а скуп свих сопствених вектора је дат са $M = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нама је за партикуларно решење довољно да изаберемо једног

представника из скупа сопствених вектора, тако да за $\alpha = 1$ добијамо $X_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0 \cdot t}$.

За $\lambda_2 = 1$, сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ одређујемо из једначине $(A - 1 \cdot I)M = O$, односно

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 12 & -5 & -12 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - c = 0 \\ 12a - 5b - 12c = 0 \\ -4a + b + 4c = 0 \end{cases}.$$

Решење претходног система је $(a, b, c) = (\alpha, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а скуп свих сопствених вектора је дат са $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, одакле за $\alpha = 1$ добијамо $X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1 \cdot t}$.

Коначно, за $\lambda_3 = 2$, сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ одређујемо из једначине $(A - 2 \cdot I)M = O$, односно

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 12 & -6 & -12 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -b - c = 0 \\ 12a - 6b - 12c = 0 \\ -4a + b + 3c = 0 \end{cases}.$$

Решење претходног система је $(a, b, c) = (\alpha, -2\alpha, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а скуп свих сопствених вектора је дат са $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. За $\alpha = 1$ добијамо $X_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$.

На основу одређених партикуларних решења, можемо одредити опште решење. Важи

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t) = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t},$$

односно

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 2C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t} \\ y(t) &= 3C_1 - 2C_3 e^{2t} \\ z(t) &= C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t} \end{aligned} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

2. Решити систем

$$\left. \begin{aligned} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -x + 5y - z \\ z' &= x - y + 3z \end{aligned} \right\}.$$

Решење. Нека је A матрица датог система. Тада је $\det(A - \lambda I) = 0$ еквивалентно са

$$0 = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36) = p(\lambda).$$

Није тешко уочити да је $\lambda = 2$ једна нула полинома $p(\lambda)$. Дељењем полинома $p(\lambda)$ полиномом $\lambda - 2$ добијамо да важи $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = (2 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 6)$. Дакле, сопствене вредности матрице A су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 6$. Као и у претходном задатку ћемо одредити сопствени вектор за сваку од сопствених вредности као нетривијално решење једначине

$$(7) \quad (A - \lambda_i I)M = O, \quad i = 1, 2, 3.$$

За $\lambda_1 = 2$ се (7) своди на систем

$$\left. \begin{aligned} a - b + c &= 0 \\ -a + 2b - c &= 0 \\ a - b + c &= 0 \end{aligned} \right\},$$

чије је решење $(a, b, c) = (\alpha, 0, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, одакле је $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}$.

Слично, за $\lambda_2 = 3$ и $\lambda_3 = 6$ добијамо системе

$$\left. \begin{aligned} b - c &= 0 \\ a - 2b + c &= 0 \\ a - b &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 3a + b - c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ a - b - 3c &= 0 \end{aligned} \right\}$$

чија су решења (α, α, α) , односно $(\alpha, -2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Одатле добијамо независна партикуларна

решења $X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ и $X_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}$. Опште решење је сада

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \\ y(t) &= C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t} \\ z(t) &= -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t} \end{aligned} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

3. Решити систем

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2x - 3y + 3z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z \end{aligned} \right\}.$$

Решење. Нека је A матрица датог система. Тада је $\det(A - \lambda I) = 0$ еквивалентно са

$$0 = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -3 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2,$$

па имамо једну једностуку сопствену вредност $\lambda_1 = 0$ и једну двоструку сопствену вредност $\lambda_{2,3} = 1$.

Као и у претходним задацима, за $\lambda_1 = 0$ једноставно одређујемо одговарајуће партикуларно решење $X_1(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

За $\lambda_{2,3} = 1$ имамо два независна партикуларна решења облика $(M_1 + M_2 t)e^t$, где $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ и $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ добијамо из $(A - I)M_1 = M_2$ и $(A - I)M_2 = O$, односно

$$\left. \begin{aligned} -3a_1 - 3b_1 + 3c_1 &= a_2 \\ a_1 + b_1 - c_1 &= b_2 \\ -a_1 - b_1 + c_1 &= c_2 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} -3a_2 - 3b_2 + 3c_2 &= 0 \\ a_2 + b_2 - c_2 &= 0 \\ -a_2 - b_2 + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

одакле је $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ и $c_1 = a_1 + b_1$, при чему су a_1 и b_1 произвољне вредности. Одабиром вредности за a_1 и b_1 добијамо X_2 и X_3 : За $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$ је

$$X_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

док је за $a_1 = 1$ и $b_1 = 0$

$$X_3(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t.$$

Опште решење је сада

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 3C_1 + C_3 e^t \\ y(t) &= -C_1 + C_2 e^t \\ z(t) &= C_1 + (C_2 + C_3) e^t \end{aligned} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

4. Решити систем

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= -y + 2z \end{aligned} \right\}.$$

Решење. Карактеристични полином матрице датог система је $(2 - \lambda)(\lambda - 1)^2$. За $\lambda_1 = 2$ једноставно добијамо партикуларно решење $X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$, док за $\lambda_{2,3} = 1$ имамо систем

$$\left. \begin{array}{l} -b_1 + c_1 = a_2 \\ a_1 - c_1 = b_2 \\ -b_1 + c_1 = c_2 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} -b_2 + c_2 = 0 \\ a_2 - c_2 = 0 \\ -b_2 + c_2 = 0 \end{array} \right\},$$

одакле је $a_2 = b_2 = c_2$, $a_1 = c_1 + c_2$ и $b_1 = c_1 - c_2$. За $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ добијамо решење $X_2(t)$, а за $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ добијамо $X_3(t)$, где је

$$X_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad X_3(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) e^t = \begin{bmatrix} 1+t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix} e^t,$$

па је опште решење дато са

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3(1+t)e^t \\ y(t) = C_2 e^t + C_3(t-1)e^t \\ z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t + C_3 e^t \end{array} \right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

5. Решити систем

$$\left. \begin{array}{l} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x + 4y \end{array} \right\}.$$

Решење. Ако је A матрица датог система, тада сопствене вредности налазимо као решење једначине $\det(A - \lambda I) = 0$, односно

$$0 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 + 9 = (\lambda - 4 - 3i)(\lambda - 4 + 3i).$$

Дакле, решења су $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Одредимо најпре X_{kom} :

$$(A - (4 + 3i)I)M = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ia + b = 0 \\ a - bi = 0 \end{cases},$$

одакле је $a = bi$, па је $M = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$. За $\alpha = 1$ имамо

$$\begin{aligned} X_{\text{kom}}(t) &= \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(4+3i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} \cdot e^{3it} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} (\cos 3t + i \sin 3t) \\ &= \begin{bmatrix} i \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t + i \sin 3t \end{bmatrix} e^{4t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} e^{4t}}_{X_1(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{bmatrix} e^{4t}}_{X_2(t)}, \end{aligned}$$

одакле је опште решење $X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$, односно

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = -C_1 e^{4t} \sin 3t + C_2 e^{4t} \cos 3t \\ y(t) = C_1 e^{4t} \cos 3t + C_2 e^{4t} \sin 3t \end{array} \right\}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

6. Решити систем

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = x + 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}.$$

Решење. Сопствене вредности дате матрице система добијамо из $0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, одакле је $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$. За $\lambda_1 = 1$ једноставно добијамо одговарајуће партикуларно решење

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t. \text{ За } \lambda_{2,3} = \pm i \text{ најпре посматрамо систем } (A - iI)M = O, \text{ односно}$$

$$\begin{cases} (2-i)a - b + 2c = 0 \\ a - ib + 2c = 0 \\ -2a + b - (1+i)c = 0 \end{cases},$$

чије је решење $(a, b, c) = (-(1+i)\alpha, -(1+i)\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. За $\alpha = -1$ добијамо комплексно партикуларно решење

$$X_{\text{kom}} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Ако је $X_2 = \operatorname{Re}(X_{\text{kom}})$ и $X_3 = \operatorname{Im}(X_{\text{kom}})$, онда је опште решење датог система $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$, односно

$$\begin{cases} x(t) = (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t \\ y(t) = 2C_1 e^t + (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t \\ z(t) = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t \end{cases}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□