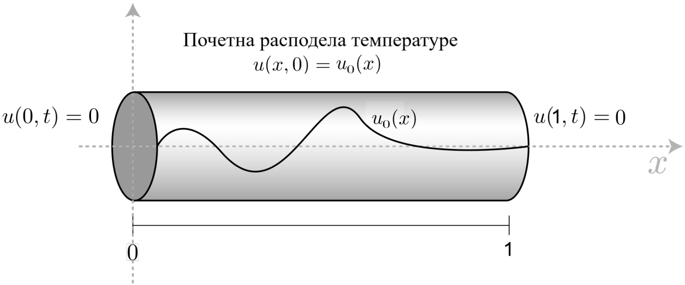
Prezentacija predmeta Numerička analiza

Nastavne teme:

1. Približni brojevi i greške funkcije
2. Nelinearne jednačine
3. Sistemi linearnih jednačina
4. Sistemi nelinearnih jednačina
5. Polinomska interpolacija
6. Aproksimacija funkcija
7. Numerička integracija
8. Diferencijalne jednačine

Primer:

- Modelujemo provođenje toplote u štapu kroz vremenski period $[0, T]$.
- Posmatraćemo štap kao jednodimenziono idealno telo. Svaka tačka na štapu ima koordinatu iz intervala $(0, 1)$.
- Zanemarićemo sva spoljna delovanja na štap osim izvora toplote koji je opisan funkcijom $f(x, t)$.
- Smatraćemo da je poznata početna raspodela temperature u štapu i da je opisana funkcijom $u_0(x)$.
- Pretpostavićemo da je temperatura na krajevima uvek jednaka nuli.
- Rešenje problema je funkcija $u(x, t)$ temperature u tački x u trenutku t.



Matematička jednačina koja odgovara problemu je:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0, T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,1).$$

- Tačno rešenje ovog problema glasi:

$$u(x,t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int\limits_0^1 \left[u_0(y) + \int\limits_0^t f(y,s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

- Tačno rešenje ovog problema glasi:

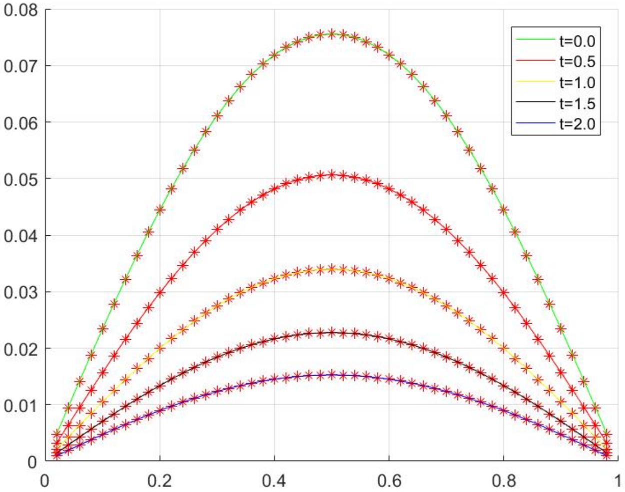
$$u(x,t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int_0^1 \left[u_0(y) + \int_0^t f(y,s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

- Tačno rešenje često nije moguće odrediti.

- Tačno rešenje ovog problema glasi:

$$u(x,t) = 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \sin j\pi x \int_0^1 \left[u_0(y) + \int_0^t f(y,s) e^{j^2\pi^2 s} ds \right] \sin j\pi y dy$$

- Tačno rešenje često nije moguće odrediti.
- Potrebno nam je numeričko rešenje!


0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t=0.0
t=0.5
t=1.0
t=1.5
t=2.0

1 Pojam greške

Pojmovi koji su u osnovi numeričkog izračunavanja:

- Približne vrednosti brojeva,
- Značajne i sigurne cifre,
- Zaokrugljivanje
- Direktan i obratan problem greške funkcije

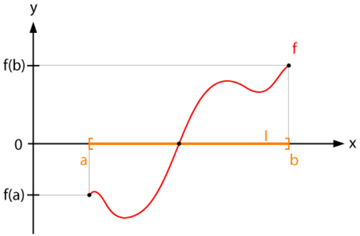
2 Nelinearne jednačine

Rešavamo jednačinu $f(x) = 0$, gde je f u opštem slučaju neka nelinearna funkcija.

Ukoliko postoji realan broj ξ takav da je $f(\xi) = 0$, tada njega zovemo *tačnim rešenjem* jednačine.

Osnovni zadaci:

- Izolacija rešenja: Nalaženje intervala $[a, b]$ koji sadrži ξ.
- Nalaženje približnog rešenja sa unapred zadatom greškom.



2 Nelinearne jednačine

Razmatraćemo iterativne metode za dobijanje približnog rešenja:

- Metoda polovljenja intervala;
- Njutnova metoda (metoda tangenti);
- Metoda regula falsi;
- Metoda (proste) iteracije.

Razmatramo konvergenciju i ocenjujemo tačnost svake metode.

3 Sistemi linearnih jednačina

Rešavamo jednačinu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, ..., n$, odnosno u matričnom obliku:

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \;\; x, b \in \mathbb{R}^n.$$

3 Sistemi linearnih jednačina

Rešavamo jednačinu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, ..., n$, odnosno u matričnom obliku:

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \;\; x, b \in \mathbb{R}^n.$$

Dve grupe metoda za rešavanje ovog problema:

- direktne,
- iterativne.

3 Sistemi linearnih jednačina

Rešavamo jednačinu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

gde su $a_{ij}, x_j, b_i \in \mathbb{R}$, za sve $i, j = 1, 2, ..., n$, odnosno u matričnom obliku:

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \;\; x, b \in \mathbb{R}^n.$$

Dve grupe metoda za rešavanje ovog problema:

- direktne,
- iterativne. Mi se njima bavimo.

4 Sistemi nelinearnih jednačina

Rešavamo sistem oblika:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

gde su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neke, u opštem slučaju, nelinearne funkcije.

Razmatramo dve iterativne metode:

- Metoda iteracije,
- Metoda Njutn-Kantoroviča.

5 Polinomska interpolacija

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

1953	1961	1971	1981	1991	2002
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

5 Polinomska interpolacija

Razmotrimo primer broja stanovnika Beograda kroz godine:

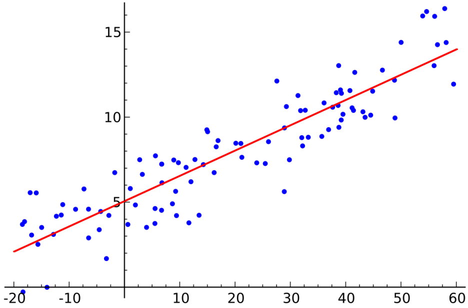
1953	1961	1971	1981	1991	2002
477982	657362	899094	1087915	1133146	1119642

Potrebno je proceniti broj stanovnika 1994. godine.

- Jedan poznati pristup ovom problemu je aproksimacija funkcije interpolacionim polinomom.
- Razmatraćemo nekoliko varijanti tog polinoma: Lagranžov, Njutnov za neekvidistantne i Njutnov za ekvidistantne čvorove.

6 Polinomska regresija

- Drugačiji vid aproksimacije funkcije od interpolacije: Najbolju aproksimaciju određujemo metodom najmanjih kvadrata.
- Poseban akcenat je na linearnoj regresiji.



8 Diferencijalne jednačine

Razmatraćemo Košijev problem

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a),$$

odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

8 Diferencijalne jednačine

Razmatraćemo Košijev problem

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Na osnovu Njutn-Lajbnicove teoreme znamo da je ispunjeno

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a),$$

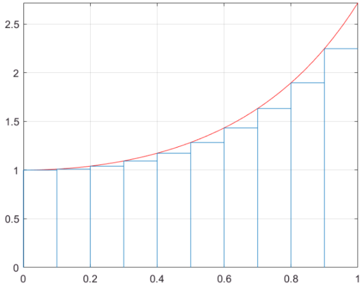
odakle je

$$y(a) = y(x) + \int_a^x f(t, y(t))dt.$$

Potrebno nam je znanje kako da izračunamo približno integral koji se pojavio.

7 Numerička integracija

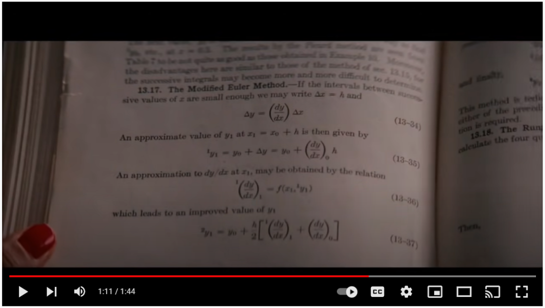
- Bavićemo se aproksimacijom integrala takozvanim kvadraturnim formulama.
- Posebno ćemo se baviti Njutn-Kotesovim kvadraturnim formulama:
  - Metoda pravougaonika,
  - Metoda trapeza,
  - Simpsonova metoda.



8 Diferencijalne jednačine

Metode koje ćemo razmatrati:

- Ojlerova metoda,
- Metode tipa Runge-Kuta.



Euler's Method scene in Hidden Figures