ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 29.11.1997.

Група А

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix},\ a \in R \right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, доказати да је $(A, \cdot)$ Абелова група.

2. У зависности од вредности реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rrrrcr} x + & 2y - & 3z + & bu & = & -1 \\ x - & (a-2)y + & (b-3)z + & bu & = & -4 \\ ax - & (a^2-2a)y - & 2az + & a(b-1)u & = & -4a-b \\ ax - & (a^2-2a)y - & 2abz + & a(b-3)u & = & -4a-3b \end{array}.$$

3. Дати су вектори: $\vec{a} = (m-2, 3, -1)$, $\vec{b} = (m, -1, 0)$ и $\vec{c} = (3, -1, -1)$, где је $m \in R$.

(1) Одредити вредност параметра m тако да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ буду линеарно зависни.

(2) За m из (1) изразити вектор c преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(3) Одредити једначину равни која садржи тачку $A(2, -1, 3)$ и која је нормална на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 29.11.1997.

Група Б

1. Ако је $A = \{a + b\sqrt{5},\ a, b \in Q\}$, испитати да ли је $(A, +, \cdot)$ поље.

2. Нека је

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$

где је $a \in R$. Одредити скуп вредности параметра a за које су матрице A, B, C и D линеарно независне.

3. Дате су тачке $A(-6, 1, -1)$ и $B(14, -13, -4)$ и права

$$p: \ \frac{x+6}{6} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{8}.$$

(1) Одредити једначину равни α која садржи тачку A и праву p.

(2) Израчунати површину троугла ABB_1, где је B_1 пројекција тачке B на раван α.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 29.11.1997.

Група Ц

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,,\ a,b,c \in R \right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, испитати да ли је $(A,\cdot)$ група.

2. Нека су e_1, e_2, e_3 и e_4 вектори базе векторског простора и нека је

$$\begin{aligned} x &= e_1 + 2e_2 + \lambda e_3 + 3e_4 \\ y &= 7e_1 + 2e_2 + 4e_3 + e_4 \\ z &= 17e_1 + 4e_2 + 10e_3 + e_4 \\ u &= 3e_1 + 3e_2 + e_3 + 4e_4, \end{aligned}$$

где је $\lambda \in R$. Испитати линеарну зависност вектора x, y, z, u.

3. Дате су тачке $M_1(1,2,10)$, $M_2(-2,0,10)$ и вектор $\vec{a} = (1,3,7)$.
(1) Одредити једначину равни α која садржи тачке M_1 и M_2 и која је паралелна вектору $\vec{a}$.
(2) Одредити тачку B симетричну тачки $A(5,-4,-2)$ у односу на раван α.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 29.11.1997.

Група Д

1. Ако је

$$A = \left\{ f_{a,b,c,d}\ ;\ f_{a,b,c,d} : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d},\ a,b,c,d \in R,\ ad-bc=1 \right\},$$

а $\star$ композиција функција дефинисана са $(f \star g)(x) = f(g(x))$, испитати да ли је $(A,\star)$ група.

2. Решити једначину $AX = B$, ако је

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 3 & -3 & a+2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a+1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и $a \in R$.

3. Дата је тачка $A(2,-1,3)$ и вектори $\vec{AB} = (2,0,-1)$, $\vec{AC} = (-2,2,-5)$ и $\vec{AD} = (3,0,0)$.
(1) Испитати линеарну зависност вектора $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$.
(2) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.
(3) Израчунати дужину висине из темена D тетраедра $ABCD$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 14.11.1997.

Група А

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^x & a \\ 0 & e^y \end{pmatrix},\ a \geq 0,\ a, x, y \in R \right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, испитати да ли је $(A, \cdot)$ група.

2. У зависности од вредности реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{aligned} -x + \ 2y - \ \ z &= 2 \\ 2x + \ ay + 2z &= b \\ ax + \ 3y + \ \ z &= 3\ . \end{aligned}$$

3. (1) Векторски производ - дефиниција и особине.

(2) Ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, доказати да је

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

(3) Израчунати дужину висине CD троугла чија су темена $A(3, 1, 5)$, $B(1, -2, -1)$ и $C(1, 1, 2)$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 14.11.1997.

Група Б

1. Ако је $A = \{(a, b, c),\ a, b, c \in R,\ a \neq 0,\ c > 0,\ a \neq b\}$, и ако је операција $\star$ дефинисана са

$$(a, b, c) \star (x, y, z) = (ax + by, ay + bx, cz),$$

испитати да ли је $(A, \star)$ група.

2. Одредити фундаментални систем решења и опште решење система линеарних једначина

$$\begin{aligned} x + \ \ y + \ 3z + \ 5u - \ 7v &= 0 \\ 2x - \ \ y + \ 4z - \ \ u + \ 2v &= 0 \\ 4x - \ \ y + \ 9z + \ \ u + \ 9v &= 0 \\ x - 2y + \ \ z - \ 6u + \ 9v &= 0\ . \end{aligned}$$

3. (1) Векторски простор. База и димензија.

(2) У зависности од реалног параметра λ испитати линеарну зависност матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 14.11.1997.

Група Ц

1. Ако је

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 1\end{pmatrix}\ ,\ a,b,c\in R\right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, испитати да ли је $(A,\cdot)$ група.

2. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rrrrcl} x- & 2y+ & 3z & & = & 2\\ x+ & (a-3)y+ & (3-ab)z- & 4u & = & 1\\ 2x+ & (a-5)y+ & (7-a-b)z- & 3u & = & b+2\ . \end{array}$$

3. (1) Мешовити производ - дефиниција и особине.

(2) Ако је $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, доказати да је

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

(3) Дати су вектори $\vec{a}=\lambda\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\lambda\vec{j}$ и $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ $(\lambda\in R)$. Одредити вредности λ_1 и λ_2 за које су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни, а затим за вредност $\lambda=max\{\lambda_1,\lambda_2\}$ изразити вектор $\vec{c}$ преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 14.11.1997.

Група Д

1. Ако је

$$A=\left\{\begin{pmatrix}a & 0 & ib\\ 0 & 0 & 0\\ ib & 0 & a\end{pmatrix}\ ,\ a,b\in R,\ a^2+b^2\neq 0,\ i^2=-1\right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, испитати да ли је $(A,\cdot)$ група.

2. Применом *Kronecker Cappelli* - јеве теореме испитати сагласност система

$$\begin{array}{rrrcl} x+ & y+ & (a-3)z & = & 0\\ 2x+ & 2y+ & (a-1)z & = & 1\\ 3x+ & (a+1)y+ & 3z & = & a\ . \end{array}$$

3. (1) Нека је $P_{\leq 2}(x)=\{ax^2+bx+c;\ a,b,c\in R\}$ и нека су $+$ и $\cdot$ операције сабирања полинома и множења полинома реалним бројем. Доказати да је $(P_{\leq 2}(x),+,\cdot)$ векторски простор над пољем $(R,+,\cdot)$.

(2) Испитати линеарну зависност полинома $p(x)=3+\lambda x+3x^2$, $q(x)=\lambda+5x+4x^2$ и $r(x)=1+3x+2x^2$ $(\lambda\in R)$ у векторском простору $P_{\leq 2}(x)$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1   14.11.1999.

Група А

1. Нека је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} ,\ a, b, c \in Q,\ a \neq 0,\ |a| \neq |b| \right\},$$

а $\cdot$ операција множења матрица. Испитати да ли је $(A, \cdot)$ Абелова група.

2. У зависности од вредности реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rrrrrr} x+ & 2y- & 3z+ & u & = & 0 \\ x- & (a-4)y- & 4z+ & (b+1)u & = & b \\ x+ & ay+ & (a-4)z & & = & a+2b-4. \end{array}$$

3. (1) Скаларни производ - дефиниција и особине. Одређивање интезитета у n - димензином простору помоћу скаларног производа.

(2) Одредити параметар a тако да раван $L_1: \ 2x + ay + z - a = 0$ буде ортогонална на раван $L_2: \ 3x - 2y - 4z - 5 = 0$, а затим одредити угао између равни L_1 и $L_3: \ x + 2y - z + 3 = 0$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1   14.11.1999.

Група Б

1. Ако је $A = \{(a, b, c),\ a, b, c \in R,\ a \neq 0\}$, и ако је операција $\star$ дефинисана са

$$(a, b, c) \star (e, f, g) = (ae, af + bc, ag + bf + ce),$$

испитати да ли је $(A, \star)$ Абелова група.

2. (1) Крамерова теорема. Формулација и доказ.

(2) У зависности од реалног параметра a решити једначину $AX = B$, ако је

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Дате су права $p: \ 4x + y - 2z - 13 = 0,\ 2x + 5y - 4z - 23 = 0$ и тачка $M(1, 6, 2)$.

(1) Одредити једначину равни π коју одређују права p и тачка M.

(2) Израчунати $d(M, p)$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1   14.11.1999.

Група Ц

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ b & a-ib \end{pmatrix},\ a,b \in Q,\ a^2+b^2 \neq 0 \right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, испитати да ли је $(A,\cdot)$ Абелова група.

2. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rrrrrcl} x+ & y & - & 3u- & v & = & 0 \\ 2x+ & (a+2)y- & 2z+ & 4u- & 7v & = & 0 \\ x- & y+ & az- & 13u+ & 4v & = & 0\ . \end{array}$$

3. (1) Линеарна зависност и независност n вектора.

(2) Дате су тачке $A(1,1,0)$, $B(3,1,1)$, $C(-1,4,2)$ $D(5,0,5)$. Испитати линеарну зависност вектора $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, а затим израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1   14.11.1999.

Група Д

1. (1) Доказати да операција на групоиду може имати само један неутрални елемент.

(2) Нека је $A = \{(a,b)\ :\ a,b \in Q,\ b \neq 0\}$, а $\star$ операција дефинисана са

$$(a,b) \star (c,d) = (a+c, bd).$$

Испитати да ли је $(A,\cdot)$ Абелова група.

2. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x- & y+ & z- & 3u & = & -2 \\ x+ & y+ & z- & 2u & = & a \\ 2x+ & 2y+ & az- & 4u & = & a+1\ . \end{array}$$

3. Одредити једначину праве p која је паралелна правој $q\ :\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{1}$ и која садржи пресек правих $r\ :\ \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ и $s\ :\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 1

1. Ако је $A = \{(a,b),\ a,b \in R,\ a \neq 0\}$, и ако је операција $\star$ дефинисана са

$$(a,b) \star (c,d) = (ac, d+b),$$

испитати да ли је $(A, \star)$ група.

2. У зависности од вредности реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x - & 3y + & z - & u & = & 4 \\ 2x + & (a-b-3)y - & z + & 2u & = & 3 \\ 4x + & (a-b-6)y - & (a-b)z + & u & = & 9-a-b. \end{array}$$

3. Испитати линеарну зависност полинома p, q и r ако је

$$p(x) = 3 + 2x + 5x^2, \quad q(x)2 + 4x + 7x^2, \quad r(x) = 5 + 6x + \lambda x^2, \quad (\lambda \in R).$$

4. Доказати да је скуп свих решења хомогеног система линеарних алгебарских једначина векторски простор.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 2

1. Ако је $A = \{(a,b),\ a,b \in R,\ a^2 + b^2 = 1\}$, и ако је операција $\star$ дефинисана са

$$(a,b) \star (c,d) = (ac - bd, ad + bc),$$

испитати да ли је $(A, \star)$ група.

2. У зависности од вредности реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rrrrcl} x - & 2y + & z + & 3u & = & -1 \\ x + & (a-3)y + & (a+3)z + & 5u & = & -4 \\ 2x + & (a-5)y + & (a^2+a+3)z + & 8u & = & a-4. \end{array}$$

3. У векторском простору R^3 дати су вектори

$$a = (2, \lambda + 2, 5), \quad b = (3, 7, 8), \quad c = (1, -6, \lambda).$$

Испитати линеарну зависност вектора a, b и c, а затим за $\lambda = 1$ вектор a изразити линеарно помоћу вектора b и c.

4. Крамерова теорема. Доказ.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 3

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ , \ a, b \in R, \ a \neq -1, \ c \neq -1 \right\},$$

а операција $*$ дефинисана са $M_1 * M_2 = M_1 + M_2 + M_1 \cdot M_2$. Доказати да је $(A, *)$ група и испитати да ли је Абелова.

2. У зависности од вредности реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{aligned} 2x - \ y + \ \ z + \ \ u &= 3 \\ -x + \ y + \ 3z \qquad &= 4 \\ 3x - \ y + \ 5z + \ au &= b. \end{aligned}$$

3. Израчунати запремину пирамиде чија је основа $ABCD$ паралелограм са теменима $A(1, -1, 0)$, $B(4, 2, 3)$, $D(2, -1, -1)$, а врх је тачка $V(2, 1, 0)$.

4. Крамерова теорема. Доказ.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 4

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ , \ a, b, c \in R, \ ab \neq 0 \right\},$$

а операција $\cdot$ операција множења матрица, доказати да је $(A, \cdot)$ група и испитати да ли је Абелова.

2. У зависности од вредности реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{aligned} x + \ \ y - \ \ z + \ \ u &= 2 \\ -x + \ 2y + \ \ z - \ 3u &= -1 \\ 5x - \ \ y + \ 2z - \ 4u &= 2 \\ ax + \ \ y + \ \ z - \ 3u &= b. \end{aligned}$$

3. Израчунати висину из темена T паралелепипеда који образују радијус вектори $\vec{a} = (1, -4/3, -1)$, $\vec{b} = (2, -2/3, 1)$ и $\vec{c} = (0, 5, -2)$, где је T крај вектора $\vec{c}$.

4. Доказати да је скуп свих решења хомогеног система линеарних алгебарских једначина векторски простор.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 5

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x \end{pmatrix} \;,\; x, y \in R,\; x^2 + y^2 \neq 0 \right\},$$

а операција $\cdot$ операција множења матрица, испитати да ли је $(A, \cdot)$ група.

2. У зависности од вредности реалног параметра a решити систем

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - u &= 1 \\ 2x + y - z + 2u &= 0 \\ -x + 4y + 2z \quad\;\; &= 5 \\ 2x + 3y + 4z + u &= 6 \\ x + 5y + z + au &= a + 3. \end{aligned}$$

3. Дати су вектори $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Испитати да ли су вектори $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ компланарни.

4. Доказати да регуларна квадратна матрица A има јединствену инверзну матрицу A^{-1} и да је $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 6

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \;,\; a, b \in Q,\; x^2 + y^2 \neq 0 \right\},$$

а операција $*$ множење матрица, испитати да ли је $(A, \cdot)$ група.

2. У зависности од вредности реалног параметра a решити матричну једначину

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Доказати да вектори $e_1 = (3, 5, -3)$, $e_2 = (-1, 0, 2)$ и $e_3 = (2, 4, -1)$ чине базу у R^3 и изразити вектор $x = (3, 0, 0)$ помоћу вектора те базе.

4. Кронекер Капелијева теорема. Доказ.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 7

1. Ако је

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & ka \end{pmatrix} ,\ a, k \in R,\ ak \neq 0 \right\},$$

а $\cdot$ множење матрица, доказати да је $(A, \cdot)$ група и испитати да ли је Абелова.

2. У зависности од вредности реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x - & y + & 3z + & 5u & = & 0 \\ 2x + & ay + & 4z + & (a+3)u & = & 2 \\ -x - & 2ay + & (a^2-7)z - & 2(a+3)u & = & a^2-3. \end{array}$$

3. Тачке $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$ и $D(2,3,8)$ су темена тетраедра. Израчунати дужину висине тетраедра из темена D.

4. Доказати да регуларна квадратна матрица A има јединствену инверзну матрицу A^{-1} и да је $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$.

ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1 19.11.2000.

Група 8

1. Ако је $A = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ и ако је $*$ операција дефинисана са

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2 - a_1 a_2),$$

доказати да је $(A, *)$ група и испитати да ли је Абелова.

2. Одредити матрицу X ако је $AX - B = X$, где је

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -13 & 13 & -13 \end{pmatrix}.$$

3. Дати су вектори

$$\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}, \quad \vec{b} = m\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \vec{c} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}, \quad (m \in R).$$

Испитати компланарност вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а затим за $m = 2$ изразити вектор $\vec{c}$ линеарно пмоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Кронекер Капелијева теорема. Доказ.

I-3651 24.11.2002

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :____________________________, број индекса: __________

1. Нека је $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 2b & 0 & a \end{bmatrix}; a,b\in Q\right\}$ и "$\cdot$" множење матрица.Тада :

Операција "$\cdot$" а) је затворена јер важи ________________________________

б) није затворена јер је ________________________________

Операција "$\cdot$" а) је асоцијативна јер важи ________________________________

б) није асицијативна јер је ________________________________

Јединични елемент а) постоји и једнак је ________________________________

б) не постоји јер је ________________________________

За сваки елемент $a\in A$ инверзни елемент

а) постоји и једнак је ________________________________

б) не постоји јер је ________________________________

Операција "$\cdot$" а) је комутативна јер важи ________________________________

б) није комутативна јер је ________________________________

Структура $(A,\cdot)$ је а) групоид а није полугрупа

б) полугрупа без јединице

в) полугрупа са јединицом а није група

г) некомутативна група

д) Абел-ова група

2. Дата је матрична једначина $A\cdot X=B$, где је $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} b-3 \\ b-6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Систем има једнопараметарску фамилију решења за $a=$____ и $b=$____
- Систем нема решења за $a=$____ и $b=$____
- За $a\neq 1$ и $b\in R$ решење система је $(x,y,z)=$________________________

3. Дата су праве $p:\begin{cases} 2x-y+3z-4=0 \\ x+5y-2z-4=0 \end{cases}$ и тачка $A(0,-4,3)$.

- Канонски облик једначине праве p је $p:$________________
- Растојање тачке A до праве p износи $d(A,p)=$______
- Једначина праве q, која садржи тачку A и паралелна је са правом p, гласи $q:$________________
- Растојање правих p и q износи $d(p,q)=$_____

I-4922

24.11.2002.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :____________________________, број индекса: __________

1. Нека је $A=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}; x, y \in R, |x-1| \neq |y|\right\}$ и "$*$" операција дефинисана једнакошћу $X_1 * X_2 = (X_1 - E)\cdot(X_2 - E)$, где је E јединична матрица. Тада :

Операција "$*$" а) је затворена јер важи ______________________________

б) није затворена јер је ______________________________

Операција "$*$" а) је асоцијативна јер важи ______________________________

б) није асицијативна јер је ______________________________

Јединични елемент а) постоји и једнак је ______________________________

б) не постоји јер је ______________________________

За сваки елемент $x \in A$ инверзни елемент

а) постоји и једнак је ______________________________

б) не постоји јер је ______________________________

Операција "$*$" а) је комутативна јер важи ______________________________

б) није комутативна јер је ______________________________

Структура $(A,\cdot)$ је а) групоид а није полугрупа

б) полугрупа без јединице

в) полугрупа са јединицом а није група

г) некомутативна група

д) Абел-ова група

2. Дат је систем линеарних једначина :
$$\begin{aligned} 2x + y - z + 3u &= 2 \\ 4x + 5y + 5z + au &= b \\ x + 2y + 3z + u &= 1 \end{aligned}$$

- Систем има двопараметарску фамилију решења за $a=$_____ и $b=$_____
- Систем нема решења за $a=$_____ и $b=$_____
- За $a \neq 5$ и $b \in R$ решење система је $(x, y, z, u) =$____________________

3. Дата је раван $\pi : x + y + 2z = 0$, права $s: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{\lambda} = \dfrac{z-4}{1}$ и тачка $A(2,1,3)$.

- Ако је угао између праве s и равни π једнак $60°$, вредност реалног параметара λ ($\lambda \leq 0$), износи $\lambda =$_____
- За добијено λ, пресек праве s и равни π је тачка S са координатама __________
- Растојање тачке A до тачке S износи $d(A,S) =$_____
- Растојање тачке A до равни π износи $d(A,\pi) =$_____

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :__________________________, број индекса: __________

1. Нека је $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix}; a\in R\right\}$ и "+" и "·" операције сабирања и множења матрица. Тада :

Структура $(A,+)$ је а) полугрупа са неутралним елементом а није група јер важи ____

б) некомутативна група јер важи ____

в) Абел-ова група јер важи ____

Структура $(A\setminus 0,\cdot)$ је а) полугрупа са јединицом а није група јер важи ____

б) некомутативна група јер важи ____

в) Абел-ова група јер важи ____

Закон дистрибутивности а) важи јер је ____________________

б) не важи јер је ____________________

Структура $(A,+,\cdot)$ је а) није прстен јер је ____

б) прстен а није поље јер важи ____

в) поље јер важи ____________________

2. Дат је систем линеарних једначина : $\begin{array}{rcrcrcl} 10x & + & (a+11)y & - & 2(a+9)z & = & a+31 \\ 4x & + & y & & & = & 11 \\ 2x & - & 5y & + & 11z & = & 0 \end{array}$.

- Систем има јединствено решење за $a=$_____
- Систем нема решења за $a=$_____
- За $a=2$ решење система је $(x,y,z)=$____________________

3. Дате су равни $\alpha: x+z-5=0$ и $\beta: 2x+y-2z-5=0$ и права $p:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{\lambda}$.

- Једначина пресечне праве q, равни α и β, гласи q:____________________
- Ако је угао између праве p и равни α једнак $30°$, вредност реалног параметара λ ($\lambda\geq 0$), износи $\lambda=$_____
- За добијено λ, координате пресечне тачке S, праве p и равни α, су :_______
- Растојање тачке S до равни β је $d(S,\beta)=$_____

I-3484 24.11.2002.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :____________________________, број индекса: ___________

1. Нека је $A=\left\{f_{a,b}; f_{a,b}: x \to \dfrac{ax+b}{a-bx}, a,b \in Q, a^2+b^2 \neq 0\right\}$ и "$\circ$" композиција пресликавања. Тада :

Операција "$\circ$" а) је затворена јер важи ______________________________

б) није затворена јер је ______________________________

Операција "$\circ$" а) је асоцијативна јер важи ______________________________

б) није асицијативна јер је ______________________________

Јединични елемент а) постоји и једнак је ______________________________

б) не постоји јер је ______________________________

За сваки елемент $a \in A$ инверзни елемент

а) постоји и једнак је ______________________________

б) не постоји јер је ______________________________

Операција "$\circ$" а) је комутативна јер важи ______________________________

б) није комутативна јер је ______________________________

Структура $(A,\circ)$ је а) групоид а није полугрупа

б) полугрупа без јединице

в) полугрупа са јединицом а није група

г) некомутативна група

д) Абел-ова група

2. Дат је систем линеарних једначина :
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & u & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & & & = & 1 \\ x & + & 2y & & & + & u & = & 2 \\ 4x & + & 3y & + & (a^2-5a+1)z & + & 2u & = & a \end{array}.$$

- Систем има једнопараметарску фамилију решења за $a \in$______________
- Систем нема решења за $a \in$______
- За $a=5$ решење система је $(x,y,z,u)=$______________________________

3. Тачке $A(5,2,2)$, $B(4,4,1)$, $C(3,4,4)$ и $D(2,-1,3)$ су темена тетраедра $ABCD$.

- Једначина равни α, која садржи страну ABC, гласи α: ________________
- Једначина праве n, која садржи висину тетраедра из темена D на страну ABC, гласи n:________________
- Подножје висине из темена D на страну ABC је тачка D' са координатама ___________
- Дужина висине из темена D на страну ABC износи $d=$_____

II-7325 24.11.2002.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :_________________________, број индекса: __________

1. Нека је $A=\left\{\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & -a\end{bmatrix}; a\in Q\right\}$ и "+" и "·" операције сабирања и множења матрица. Тада :

Структура $(A,+)$ је а) полугрупа са неутралним елементом а није група јер важи ______________________________

б) некомутативна група јер важи ______________________________

в) Абел-ова група јер важи ______________________________

Структура $(A\setminus 0,\cdot)$ је а) полугрупа са јединицом а није група јер важи ______________________________

б) некомутативна група јер важи ______________________________

в) Абел-ова група јер важи ______________________________

Закон дистрибутивности а) важи јер је ______________________________

б) не важи јер је ______________________________

Структура $(A,+,\cdot)$ је а) није прстен јер је ______________________________

б) прстен а није поље јер важи ______________________________

в) поље јер важи ______________________________

2. Дат је систем линеарних једначина :

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & - & 3y & + & 2z & + & 4u & = & 3\\ 8x & - & 6y & - & z & - & 5u & = & 9\\ 7x & - & 3y & + & bz & + & 17u & = & a+2\end{array}.$$

- Систем има двопараметарску фамилију решења за $a=$_____ и $b=$_____
- Систем нема решења за $a=$_____ и $b=$_____
- За $b\neq 7$ и $a\in R$ решење система је $(x,y,z,u)=$____________________

3. Дата је тачка A(-3,11,3) и раван $\alpha: 2x-5y-z+4=0$.

- Вектор нормалан на раван α је $\vec{n}_\alpha=$__________
- Права n, која садржи тачку A и нормална је на раван α, има једначину n:______________________
- Пресек праве n и равни α је тачка S са координатама : __________
- Координате тачке B, која је симетрична тачки A у односу на раван α, су : __________

II-7396 24.11.2002.

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :_________________________, број индекса: __________

1. Нека је $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 5b \\ b & a \end{bmatrix}; a,b\in R\right\}$ и "$\cdot$" множење матрица. Тада :

Операција "$\cdot$" а) је затворена јер важи ______________________________

б) није затворена јер је ______________________________

Операција "$\cdot$" а) је асоцијативна јер важи ______________________________

б) није асицијативна јер је ______________________________

Јединични елемент а) постоји и једнак је ______________________________

б) не постоји јер је ______________________________

За сваки елемент $a\in A$ инверзни елемент

а) постоји и једнак је ______________________________

б) не постоји јер је ______________________________

Операција "$\cdot$" а) је комутативна јер важи ______________________________

б) није комутативна јер је ______________________________

Структура $(A,\cdot)$ је а) групоид а није полугрупа

б) полугрупа без јединице

в) полугрупа са јединицом а није група

г) некомутативна група

д) Абел-ова група

2. Дат је систем линеарних једначина :
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x &+& 3y &+& 2z &+& u &=& b-2 \\ 6x &+& (a-10)y &-& 4z &-& 3u &=& 6-2b \\ -4x &+& 7y &+& (a+2)z &+& 2u &=& 3b-4 \end{array}$$

- Систем има једнопараметарско решење за $a=$_____ и $b=$_____
- Систем нема решења за $a=$_____ и $b=$_____
- За $a=0$, $b\in R$ решење система је $(x,y,z,u)=$______________________________

____

3. Дата су праве $p:\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{7}$ и $q:\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{6}$.

- Једначина праве r, која сече праву q и паралелна је правој p, гласи
r:____________________________
- Једначина равни α, која садржи праву q и паралелна је правој p, гласи
α:____________________________
- Растојање праве p до равни α износи $d(p,\alpha)=$_____
- Растојање правих p и q износи $d(p,q)=$_____

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :________________________, број индекса: _________

1. Нека је $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}; a, b \in R,\ |a+1| \neq |b| \right\}$ и "$*$" операција дефинисана једнакошћу $X_1 * X_2 = (X_1 + E)\cdot(X_2 + E)$, где је Eјединична матрица. Тада :

   Операција "$*$" а) је затворена јер важи ________________________________
   б) није затворена јер је ________________________________
   Операција "$*$" а) је асоцијативна јер важи ________________________________
   б) није асицијативна јер је ________________________________
   Јединични елемент а) постоји и једнак је ________________________________
   б) не постоји јер је ________________________________
   За сваки елемент $a \in A$ инверзни елемент
   а) постоји и једнак је ________________________________
   б) не постоји јер је ________________________________
   Операција "$*$" а) је комутативна јер важи ________________________________
   б) није комутативна јер је ________________________________
   Структура $(A,\cdot)$ је а) групоид а није полугрупа
   б) полугрупа без јединице
   в) полугрупа са јединицом а није група
   г) некомутативна група
   д) Абел-ова група

2. Дат је систем линеарних једначина : $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & - & 3u & = & 2 \\ x & + & 5y & - & z & + & u & = & 3 \\ -2x & + & 2y & + & 5z & + & 10u & = & -3 \\ 3x & + & 7y & - & 5z & + & (a^2-14)u & = & a+4 \end{array}$.

   - Систем има двопараметарску фамилију решења за $a =$ ____
   - Систем нема решења за $a =$ ____
   - За $a^2 \neq 9$ решење система је $(x, y, z, u) =$ ________________________________

3. Дата је раван $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$, права $p : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{\lambda} = \dfrac{z-1}{1}$ и тачка $A(2,-1,4)$.

   - Ако је права p паралелна равни α, вредност реалног параметара λ је _____
   - За добијено λ, једначина праве q, која садржи тачку A и паралелна је правој p, гласи q:______________________________
   - Једначина праве n, која садржи тачку A и нормална је на раван α, гласи n: ____________________________
   - Једначина равни β, која садржи тачку A, паралелна је правој p и нормална је на раван α, гласи β :_______________________________

II-7168 24.11.2002

I КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1

Презиме и име :__________________________, број индекса: __________

1. Нека је $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b-1 & 0 \\ a & 0 & a\end{bmatrix}; a,b\in R, b\neq 1\right\}$ и "$\cdot$" множење матрица.Тада :

Операција "$\cdot$" а) је затворена јер важи ____

б) није затворена јер је ____

Операција "$\cdot$" а) је асоцијативна јер важи _______________________________________

б) није асицијативна јер је _______________________________________

Јединични елемент а) постоји и једнак је _______________________________________

б) не постоји јер је ____

За сваки елемент $a\in A$ инверзни елемент

а) постоји и једнак је ____

б) не постоји јер је ____

Операција "$\cdot$" а) је комутативна јер важи _______________________________________

б) није комутативна јер је _______________________________________

Структура $(A,\cdot)$ је а) групоид а није полугрупа

б) полугрупа без јединице

в) полугрупа са јединицом а није група

г) некомутативна група

д) Абел-ова група

2. Дат је систем линеарних једначина $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -1 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & az & = & -2 \\ -x & + & 4y & + & 7z & = & a^2 \end{array}.$

- Систем има јединствено решење за $a=$____
- Систем нема решења за $a=$____
- За $a=1$ решење система је $(x,y,z)=$____

3. Дата су праве $p:\begin{cases}2x-y-z=0\\ 3y-z+2=0\end{cases}$ и $q:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{\lambda}$.

- Канонски облик једначине праве p је $p:$_______________________
- Ако се праве p и q секу вредност реалног параметра λ је _____
- За нађено λ једначина равни α , коју граде праве p и q , гласи $\alpha:$___
____
- Растојање координатног почетка до равни α износи $d(O,\alpha)=$_____

2003

5801 22.11.2003.

II KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ____ broj indeksa: ____________

1. Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ i operacija * definisana sa $(a,b) * (c,d) = (a+c, 2^c b + d)$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost _________, jer je ____

____

- Asocijativnost _______, jer je ____
- Neutralni element ____
- Inverzni element ____
- Komutativnost ________, jer je ____

Struktura $(A,\cdot)$ je ________________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x & + & 3y & + & 4z & - & bu & = & 4 \\ 3x & + & by & + & 5z & - & 2u & = & 1 \\ 9x & + & 2y & + & 3z & - & 6u & = & a+b \end{array}$$

gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________________________
- nema rešenja, za ________________________

3. Data su prave $p: \begin{cases} 2x - y + 3z + 8 = 0 \\ x + 2y - 5z - 19 = 0 \end{cases}$ i $q: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{a} = \dfrac{z+7}{10}$. Tada je

- kanonski oblik prave p: ____
- $a =$ ________ tako da se prave p i q seku
- ravni α određena pravama p i q je: ________________________________

4. Neka je A kvadratna regularna matrica. Dokazati da je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot adj\,(A)$.

5702 22.11.2003

I

II KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

30

1. Neka je $\mathbf{A} = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbf{R}\}$ i operacija * definisana sa $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost _________, jer je ______________________________

____

- Asocijativnost _______, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,*)$ je ____________________.

20

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcccccl} 2x & + & y & - & \cancel{a}^{2}z & + & u & = & b-1 \\ 4x & + & 2y & - & (3b-b^2)z & + & 2u & = & b \\ 4x & - & y & + & z & + & 2u & = & -2 \end{array}$$

gde je b realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ____________________
- dvoparametarsko rešenje, za ____________________
- nema rešenja, za ____________________

30

3. Data je prava $p:\begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ 2x-3y+5z-2=0 \end{cases}$ i tačke $A(-1,-5,4)$ i $B(4,-7,1)$. Tada je

- prava p u kanonskom obliku: ____________________
- tačka $C \in p$ podjednako udaljena od tačaka A i B: ____________________
- ravni α određena tačkama A, B i C je: ____________________

20

4. Neka je A kvadratna regularna matrica. Dokazati da je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot adj(A)$.

5603 22.11.2003.

~~II~~ I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ i operacija * definisana sa $(a,b)*(c,d) = (a+c,(-1)^c b + d)$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

____

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x &+ a^2y &+ a^2z &= a^2 \\ x &+ ay &+ a^2z &= 1 \\ x &+ ay &+ az &= a \end{aligned}$$

gde je a realni parametar, ima

- jedinstveno rešenje, za ____________________
- dvoparametarsko rešenje, za ____________________
- nema rešenja, za ____________________

3. Date su ravni $\alpha: 2x - y + 2z - 6 = 0$, $\beta: 3x - y + 4z - 8 = 0$ i tačka $A(3,-1,5)$. Tada je

- presečna prava p ravni α i β je: ______________________________
- ravan γ koja sadrži pravu p i tačku A je: ______________________________
- ugao između ravni α i γ je: ______________________________

4. Kramerova teorema. Dokaz.

5504 22.11.2003.

I

~~II~~ KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ____ broj indeksa: ____________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & 2y \\ 3y & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y\in \mathbf{Q}\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost _________, jer je ____

____

- Asocijativnost _______, jer je ____
- Neutralni element ____
- Inverzni element ____
- Komutativnost ________, jer je ____

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcc} 3x & + & y & - & z & + & 3u & = & 1 \\ 6x & + & 2y & + & 5z & + & (b-1)u & = & 5 \\ (2b+1)x & + & 3y & + & 4z & + & 6u & = & a^2+2 \end{array}$$

gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za _________________________
- dvoparametarsko rešenje, za _________________________
- nema rešenja, za _________________________

3. Date su tačke $A(2,1,3), B(1,2,2), C(2,2,0)$.

- prava p određena tačkama A i B je: ________________________________
- tačka C' simetrična tački C u odnosu na pravu p je: ____________________
- ravan α određena tačkom C i pravom p je: ____________________________

4. Kramerova teorema. Dokaz.

5405 22.11.2003.

~~II~~ I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________broj indeksa:__________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a \end{bmatrix} \mid a,b\in \mathbf{R}, a^2\neq 6b^2\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

____

- Asocijativnost _______, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost _______, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & 4z & + & u & = & -2 \\ x & + & y & + & 2z & - & u & = & a-1 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & + & (a^2-3a)u & = & a \end{array}$$

gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ____________________
- dvoparametarsko rešenje, za ____________________
- nema rešenja, za ____________________

3. Date su tačke $A(1,-1,7), B(-3,0,1), C(0,-6,7)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke A,B,C je: ____________________
- jednačina prave p koja sadrži B i C je: ____________________
- tačka A' simetrična tački A u odnosu na pravu p je: ____________________

4. Kramerova teorema. Dokaz.

5306 22.11.2003.

II KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ____ broj indeksa: ____________

1. Ako je $A = \left\{ \begin{bmatrix} c & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & c \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbf{R} \right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost __________, jer je ____
- Asocijativnost ________, jer je ____
- Neutralni element ____
- Inverzni element ____
- Komutativnost _________, jer je ____

Struktura $(A,\cdot)$ je ___________________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 5y & + & (a-1)z & + & 6u & = & 5 \\ x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 6z & + & (2a+1)u & = & b^2+2 \end{array}$$

gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za ______________________________
- nema rešenja, za ____

3. Date su tačke $A(1,3,2), B(2,1,5), C(2,-1,5), D(4,0,1)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke A,B,C je: ______________________________________
- jednačina prave n koja sadrži tačku D i normalna je na ravan α : ____________________
- tačka D' simetrična tački D u odnosu na ravan α je: _______________________________

4. Kroneker–Kapelijeva teorema. Dokaz.

5207 22.11.2003.

~~II~~ I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \ \middle|\ x, y \in \mathbf{R}, |x| \neq |y| \right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A, \cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

____

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A, \cdot)$ je ______________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x & - & 5y & - & 5z & - & (4a+14)u & = & 5-6b \\ x & + & 2y & + & 3z & + & (a+4)u & = & 2b-1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & + & (2a+15)u & = & 5b-1 \\ x & + & 7y & + & 23z & - & 12u & = & -1 \end{array}$$

gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ______________________
- dvoparametarsko rešenje, za ______________________
- nema rešenja, za ______________________

3. Date su tačke $A(2,1,3), B(1,2,2), C(2,2,0)$.

- prava p određena tačkama A i B je: ______________________
- ravan α koja sadrži tačku C i normalna je na pravu p je: ______________________
- rastojanje koordinatnog početka od prave p je: ______________________

4. Kroneker–Kapelijeva teorema. Dokaz.

5108 I 22.11.2003.

II KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a\in(0,+\infty)\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________ , jer je ______________________________

____

- Asocijativnost ________ , jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________ , jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 3x+9y-6z+2u &= a+b \\ 4x+6y-az+3u &= 4 \\ 5x+3y-2z+au &= 1 \end{aligned}$$

gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ______________________
- dvoparametarsko rešenje, za ______________________
- nema rešenja, za ______________________

3. Date su tačke $A(1,-2,1), B(2,-4,4), C(2,1,0), D(4,2,-2)$.

- površina ΔABC iznosi: ______________________
- zapremina tetraedra $ABCD$ iznosi: ______________________
- visina iz temena D, tetraedra $ABCD$ iznosi: ______________________

4. Kroneker–Kapelijeva teorema. Dokaz.

grupa 1 27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: ____________

1. Neka je $A = Q \times Z$ i operacija $*$ definisana sa $(a,b)*(c,d) = (a + 2^b c, b + d)$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

  ____

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________

- Neutralni element ______________________________

- Inverzni element ______________________________

- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,*)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 3x + 9y - 6z + 2u &= a + b \\ 4x + 6y - az + 3u &= 4 \\ 5x + 3y - 2z + au &= 1 \end{aligned}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za __________, oblika ____________________

  ____

- dvoparametarsko rešenje, za __________, oblika ____________________

  ____

- nema rešenja, za __________.

3. Date su prava $p: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ i ravan $\alpha: 2x - y + 3z + 1 = 0$ i $\beta: x-2y-2z-9=0$. Tada :

- tačka $\{A\} = p \cap \alpha$ ima koordinate : ____________________
- rastojanje tačke A od ~~prave~~ RAVNI β iznosi $d(A,\beta) =$ ____________________.

4. Kroneker–Kapelijeva teorema. Iskaz.

grupa 2

27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & -y \\ 2y & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y\in R\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________

- Neutralni element ______________________________

- Inverzni element ______________________________

- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -3x & - & 5y & - & 5z & - & (4a+14)u & =5-6b \\ x & + & 2y & + & 3z & + & (a+4)u & =2b-1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & + & (2a+15)u & =5b-1 \end{array}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________, oblika ____________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________, oblika ____________________
- nema rešenja, za ______________________________

3. Date su tačke $A(2,1,3), B(1,2,2), C(2,2,0)$.

- prava p određena tačkama A i B je: ____________________
- ravan α koja sadrži tačku C i normalna je na pravu p je: ____________________
- rastojanje koordinatnog početka od prave p je: ____________________

4. Kramerova teorema. Iskaz.

grupa 3 27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________________ broj indeksa: ____________

1. Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ i operacija $*$ definisana sa $(a,b)*(c,d)=(ac+3bd, ad+bc)$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost _________ , jer je ____

____

- Asocijativnost _______ , jer je ____

- Neutralni element ____

- Inverzni element ____

- Komutativnost ________ , jer je _______________________________________

Struktura $(A,*)$ je ________________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 5y & + & (a-1)z & + & 6u & = & 5 \\ x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 6z & + & (2a+1)u & = & b^2+2 \end{array}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za _________ , oblika ______________________
- dvoparametarsko rešenje, za __________ , oblika ______________________
- nema rešenja, za ____________________ .

3. Date su tačke $A(1,3,2), B(2,1,5), C(2,-1,5), D(4,0,1)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke A,B,C je: ______________________
- jednačina prave n koja sadrži tačku D i normalna je na ravan α : ______________
- tačka F simetrična tački D u odnosu na ravan α je: ______________________

4. Linearna zavisnost i linearna nezavisnost vektora.Osnovne definicije.

grupa 4 27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & 2y \\ 7y & x \end{bmatrix} \mid x,y\in \mathbb{R}, x^2\neq 14y^2\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & (a+4)y & + & 2z & + & u & = & 2b-1 \\ -2x & + & (2a+15)y & + & 2z & + & 2u & = & 5b-1 \\ -5x & - & (4a+14)y & - & 5z & - & 3u & = & 5-6b \end{array}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________, oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________, oblika ______________________________
- nema rešenja, za ______________________________

3. Data je prava $p:\begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ 2x-3y+5z-2=0 \end{cases}$ i tačke $A(-1,-5,4)$ i $B(4,-7,1)$. Tada je

- prava p u kanonskom obliku: ______________________________
- tačka $C\in p$ podjednako udaljena od tačaka A i B: ______________________________

4. Inverzna matrica. Osnovne definicije i tvrdjenja (bez dokaza).

grupa 5 27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: ____________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & 2y \\ 5y & x \end{bmatrix} \mid x,y\in \mathbb{R}, x^2\neq 10y^2\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost _________, jer je ______________________________

- Asocijativnost _______, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je _______________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a^2x & + & 3y & + & 5z & + & 2u & = & -1 \\ 4x & - & y & + & 2z & + & u & = & a \\ 3x & - & 6y & + & z & + & u & = & 10 \end{array}$$

, gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________________
- nema rešenja, za __________.

3. Date su tačke $A(2,1,-1), M(0,-5,0), N(2,-3,4), P(-2,-1,-1)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke M,N,P je: ______________________________
- tačka B simetrična tački A u odnosu na ravan α je: ______________________________

4. Kramerova teorema. Iskaz.

grupa 6

27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Neka je $A = Z \times Z$ i operacija $*$ definisana sa $(a,b)*(c,d)=(a+(-1)^{b}c, b+d)$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

____

- Asocijativnost _______, jer je ______________________________

- Neutralni element ______________________________

- Inverzni element ______________________________

- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,*)$ je ______________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned}
6x &- (a-3)y &+ 2bz &+ u &= 4-2a\\
4x &+ 2y &- 3z &+ u &= 1\\
4x &+ 2y &+ (b-1)z &+ u &= a
\end{aligned}$$

gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________ oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________ oblika ______________________________
- nema rešenja, za ______________ .

3. Date su ravni $\alpha: 2x-y+2z-6=0$, $\beta: 3x-y+4z-8=0$ i tačka $A(3,-1,5)$. Tada je

- presečna prava p ravni α i β je: ______________________________
- projekcija tačke A na pravu p je: ______________________________

4. Linearna zavisnost i linearna nezavisnost vektora. Osnovne definicije.

grupa 7 27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: ____________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & -y \\ 2y & x \end{bmatrix} \;\|\; x,y\in R, x^2+y^2\neq 0\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 4y & - & z & + & 2u & = & a \\ 2x & + & a^2y & + & 3z & + & 5u & = & -1 \\ x & + & 3y & - & 6z & + & u & = & 10 \end{array}$$

, gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________________
- nema rešenja, za ________ .

3. Date su tačke $A(2,1,-1), M(1,-4,2), N(-3,2,-1), P(-4,1,-3)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke M,N,P je ______________________________
- tačka B simetrična tački A u odnosu na ravan α je ______________________________

4. Kroneker-Kapelijeva teorema. Iskaz.

grupa 8 27.11.2004.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: ____________

1. Neka je $A = Z \times Z$ i operacija * definisana sa $(a,b)*(c,d)=(a+2^b c, b+d)$, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,*)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________
- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,*)$ je ____________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcccccccl} (b-1)x & + & y & + & 2z & + & 4u & = & a \\ -3x & + & y & + & 2z & + & 4u & = & 1 \\ 2bx & + & y & + & (3-a)z & + & 6u & = & 4-2a \end{array}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________ oblika ____________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________ oblika ____________________
- nema rešenja, za ______________ .

3. Data su prave $p: \begin{cases} 2x-y+3z+8=0 \\ x+2y-5z-19=0 \end{cases}$ i $q: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z+7}{10}$. Tada je

- kanonski oblik prave p: ______________________________
- $a=$ ________ tako da se prave p i q seku
- ravan α određena pravama p i q je: ______________________________

4. Inverzna matrica. Osnovne definicije i tvrdjenja (bez dokaza) .

grupa 1 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & 3y \\ 7y & x \end{bmatrix} \mid x,y\in R, x^2\neq 21y^2\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________________
- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} (2a+1)x &+ 3y + 4z + 6u = b^2+2 \\ 6x &+ 2y + 5z + (a-1)u = 5 \\ 3x &+ y - z + 3u = 1 \end{aligned}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za __________, oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za __________, oblika ______________________________
- nema rešenja, za __________.

u $M(0,-2,1)$

3. Date su prava $p:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ i ravan $\alpha: 2x-y+3z+1=0$. Tada :

- tačka $\{A\}=p\cap\alpha$ ima koordinate : ______________________________
- rastojanje tačke ~~A~~ M od prave p iznosi $d(M,p)=$ ______________.
- neka su date prava $l:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Navesti uslove pod kojima će prava l biti paralelna ravni α: ______________________________

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ______________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x\in(0,+\infty)\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ______________________
- Asocijativnost ________, jer je ______________________
- Neutralni element ______________________
- Inverzni element ______________________
- Komutativnost ________, jer je ______________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -3x & + & y & - & 2z & + & u & =2 \\ (a^2-14)x & - & y & - & 5z & + & 3u & =a+4 \\ 10x & - & 6y & + & 5z & - & 2u & =-3 \end{array}$$

, gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________, oblika ______________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________, oblika ______________________
- nema rešenja, za ______________________

3. Date su tačke $A(2,1,3), B(1,2,2), C(2,2,0)$.

- prava p određena tačkama A i B je: ______________________
- ravan α koja sadrži tačku C i normalna je na pravu p je: ______________________
- rastojanje koordinatnog početka od prave p je: ______________________
- neka su date prava $l:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Navesti uslove pod kojima će prava l pripadati ravni α: ______________________

grupa 3 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: ____________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} x & 5y \\ 2y & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y\in R, x^2\neq 10y^2\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost __________, jer je ______________________________

- Asocijativnost __________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________

- Inverzni element ______________________________

- Komutativnost __________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & (a^2-14)y & - & 5z & + & 7u & = & a+4 \\ -2x & + & 10y & + & 5z & + & 2u & = & -3 \\ x & + & y & - & z & + & 5u & = & 3 \end{array}$$

, gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za __________, oblika ______________________
- dvoparametarsko rešenje, za __________, oblika ______________________
- nema rešenja, za __________________.

3. Date su tačke $A(1,3,2), B(2,1,5), C(2,-1,5), D(4,0,1)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke A,B,C je: ______________________
- jednačina prave n koja sadrži tačku D i normalna je na ravan α : ______________
- tačka F simetrična tački D u odnosu na ravan α je: ______________________
- neka su date prava $l:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Navesti uslov pod kojim će prava l biti normalna na ravan α: ______________________

grupa 4 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ______________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x\in R\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost __________, jer je ______________________________

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________

- Inverzni element ______________________________

- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________ .

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 4z & + & 2u & = & -2 \\ (a^2-3a)x & + & 2y & + & 4z & + & 2u & = & a \\ -x & + & y & + & 2z & + & u & = & a-1 \end{array}$$

, gde je a realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________
- dvoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________
- nema rešenja, za __________ .

3. Date su tačke $A(2,1,-1), M(0,-5,0), N(2,-3,4), P(-2,-1,-1)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke M,N,P je: ______________________
- tačka B simetrična tački A u odnosu na ravan α je: ______________________
- neka su date prave $p:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ i $q:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$. Navesti uslov pod kojim se one seku:

grupa 5 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: ________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 5b \\ 7b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b\in R, a^2 \neq 35b^2\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost __________, jer je ______________________________

- Asocijativnost ________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________

- Inverzni element ______________________________

- Komutativnost ________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} (b-1)x & + & 2y & + & 5z & + & 6u & = & 5 \\ 6x & + & 3y & + & 4z & + & (2b+1)u & = & a^2+2 \\ 3x & + & y & - & z & + & 3u & = & 1 \end{array}$$

, gde su a i b realni parametri, ima

- jednoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za _____ oblika ______________________________
- nema rešenja, za ________.

3. Date su tačke $A(2,1,-1), M(1,-4,2), N(-3,2,-1), P(-4,1,-3)$.

- jednačina ravni α koja sadrži tačke M,N,P je ______________________________
- tačka B simetrična tački A u odnosu na ravan α je ______________________________
- neka su date prava $l:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Navesti uslov pod kojim će prava l biti paralelna ravni α: ______________________________

grupa 6 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE 1

Ime i prezime: ______________________________________ broj indeksa: ________

1. Ako je $A=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a\in(0,+\infty)\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost _________, jer je ____

- Asocijativnost _______, jer je ____.
- Neutralni element ____

- Inverzni element ____

- Komutativnost ________, jer je ____

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & + & 10y & - & 6z & - & 2u & = & -3 \\ -5x & + & (b^2-14)y & - & z & + & 3u & = & b+4 \\ -2x & - & 3y & + & z & + & u & = & 2 \end{array}$$

gde je b realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za __________ oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za __________ oblika ______________________________
- nema rešenja, za _______________.

3. Date su ravni $\alpha: 2x-y+2z-6=0$, $\beta: 3x-y+4z-8=0$ i tačka $A(3,-1,5)$. Tada je

- presečna prava p ravni α i β je: ______________________________
- projekcija tačke A na pravu p je:
- neka su date prava $l: \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Navesti uslove pod kojima će prava l pripadati ravni α: ______________________________

grupa 7 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ______________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 3b \\ 5b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}, a^2 \neq 15b^2 \right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost __________, jer je ______________________________
- Asocijativnost __________, jer je ______________________________
- Neutralni element ______________________________
- Inverzni element ______________________________
- Komutativnost __________, jer je ______________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ______________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} -2x &+ 5y &+ 10z &+ 2u &= -3 \\ 3x &- 5y &+ (b^2-14)z &+ 7u &= -b+4 \\ x &- y &+ z &+ 5u &= 3 \end{aligned}$$

, gde je b realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za __________, oblika ______________________________
- dvoparametarsko rešenje, za __________, oblika ______________________________
- nema rešenja, za ______________________________

3. Data je prava $p:\begin{cases} x+y-3z+2=0 \\ 2x-3y+5z-2=0 \end{cases}$ i tačke $A(-1,-5,4)$ i $B(4,-7,1)$. Tada je

- prava p u kanonskom obliku: ______________________________
- tačka $C\in p$ podjednako udaljena od tačaka A i B: ______________________________
- neka su date prava $l:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ i ravan $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$. Navesti uslov pod kojim će prava l biti normalna na ravan α: ______________________________

grupa 8 12.11.2005.

I KOLOKVIJUM IZ MATEMATIKE I

Ime i prezime: ________________________________ broj indeksa: __________

1. Ako je $A=\left\{\begin{pmatrix}-a & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ a & 0 & -a\end{pmatrix} \;\middle|\; a\in R, a\neq 0\right\}$, a $\cdot$ operacija množenja matrica, ispitati koja od sledećih svojstava važe za strukturu $(A,\cdot)$

- Zatvorenost ________, jer je ____________________________________
- Asocijativnost ________, jer je ____________________________________
- Neutralni element ____________________________________
- Inverzni element ____________________________________
- Komutativnost ________, jer je ____________________________________

Struktura $(A,\cdot)$ je ____________________.

2. Sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & - & u & = & -2\\ x & - & y & + & 2z & + & u & = & b-1\\ 2x & + & (b^2-3b)y & + & 4z & + & 2u & = & b \end{array}$$

, gde je b realni parametar, ima

- jednoparametarsko rešenje, za ________ oblika ____________________________
- dvoparametarsko rešenje, za ________ oblika ____________________________
- nema rešenja, za ____________.

3. Data su prave $p:\begin{cases}2x-y+3z+8=0\\ x+2y-5z-19=0\end{cases}$ i $q:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z+7}{10}$. Tada je

- kanonski oblik prave p: ____________________________________
- $a=$ ________ tako da se prave p i q seku
- ravan α određena pravama p i q je: ____________________________
- neka su date prave $p:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ i $q:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$. Navesti uslov pod kojim su one paralelne:

A # I колоквијум из Математике 1 **A**

24. новембар 2007.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. (*30 poena*) Дата је структура $(A,+)$, при чему је

$$A = \{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$$

и $+$ је операција сабирања полинома.

Испитати које од следећих особина има структура $(A,+)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A,+)$ група? Да ли је структура $(A,+)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & a \\ 3x & + & 2y & + & b \cdot z & = & 4. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x - 2y + 2z + 3 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon -2x + 4y - 4z = 0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити њихову пресечну праву p (шта је њен вектор правца $\vec{v}_p$ и једна тачка $P \in p$?), а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

Б I колоквијум из Математике 1 Б

24. новембар 2007.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathbb{Q} \setminus \{-2\}, *)$, при чему је операција $*$ дефинисана са

$$a * b = a \cdot b + 2a + 2b + 2.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{Q} \setminus \{-2\}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{Q} \setminus \{-2\}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{Q} \setminus \{-2\}, *)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара b и β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & \beta \\ 3x & - & 2y & + & b \cdot z & = & 4 - \beta. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дати су вектори:

$$\vec{v}_1 = (1, 4, 5), \qquad \vec{v}_2 = (-2, -3, -2), \qquad \vec{v}_3 = (3, 4, 2) \qquad \text{и} \qquad \vec{w} = (1, 2, 3).$$

а) Испитати да ли су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ линеарно независни.

б) Да ли вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$?

в) Изразити вектор $\vec{w}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$.

B **I колоквијум из Математике 1** B

24. новембар 2007.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалног параметра ν решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & \nu \cdot w & = & 7. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дати су вектори:

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -3), \qquad \vec{v}_2 = (-2, -3, 0), \qquad \vec{v}_3 = (3, 4, 2) \qquad \text{и} \qquad \vec{w} = (1, 1, 4).$$

а) Испитати да ли су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ линеарно независни.

б) Да ли вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ чине базу простора $\mathbb{R}^3$?

в) Изразити вектор $\vec{w}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$.

I колоквијум из Математике 1

24. новембар 2007.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0, c \geqslant 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 3x & - & 10y & + & 6z & = & 5 \\ -2x & + & 3y & + & 7z & = & \gamma. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x + 2y - z + 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x + 3y + z = 0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Уколико се равни α и β секу одредити њихову пресечну праву p (шта је њен вектор правца $\vec{v}_p$ и једна тачка $P \in p$?), а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

Д **I колоквијум из Математике 1** Д

24. новембар 2007.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 3a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалног параметра δ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 \\ -x & + & y & & & + & w & = & \delta. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су четири тачке у простору:

$$A(-3, 1, -3), \qquad B(1, 2, 0), \qquad C(-7, -1, -6) \qquad \text{и} \qquad D(7, 2, -3).$$

а) Одредити једначину равни α која пролази кроз тачке A, B и C.

б) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α.

в) Одредити произвољну тачку $M \in \alpha$, различиту од задатих тачака.

г) Израчунати површину троугла $\triangle ABC$.

д) Израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

е) Одредити дужину висине пирамиде $ABCD$ која полази из темена D.

E # I колоквијум из Математике 1 **E**

24. новембар 2007.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. (*30 poena*) Дата је структура $(S,\cdot)$, при чему је

$$S=\left\{x+y\sqrt{3}\mid x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q},x^2+y^2\neq 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења реалних бројева.
Испитати које од следећих особина има структура $(S,\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(S,\cdot)$ група? Да ли је структура $(S,\cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара e и ε решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 3z & + & 3u & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 6z & + & (2e+1)u & = & \varepsilon^2+2 \\ 2x & + & 5y & + & (e-1)z & + & 6u & = & 5. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су четири тачке у простору:

$$A(1,-2,3),\qquad B(0,2,2),\qquad C(5,0,1)\qquad \text{и}\qquad D(1,4,1).$$

а) Одредити једначину равни α која пролази кроз тачке A, B и C.

б) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α.

в) Да ли тачка D припада равни α?

г) Одредити једначину праве p која пролази кроз тачке A и B.

д) Одредити једначину праве q која пролази кроз тачке C и D.

е) Да ли се праве p и q секу?

К I колоквијум из Математике 1 К

24. новембар 2007.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(\mathcal{M},\cdot)$, при чему је

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & 0 & a\end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара k и m решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & z & = & 2\\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3\\ 3x & - & 10y & + & 6z & = & k\\ -2x & + & 3y & + & 7z & = & m\end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} x+y+z-1=0\\ -x-2y-2z=0\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x+2y-z+7=0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a.

б) Одредити произвољне тачке $A\in a$ и $B\in\beta$.

в) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β.

г) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Наћи пресек праве a и равни β.

е) Израчунати величину угла φ између праве a и равни β.

Л I колоквијум из Математике 1 Л

24. новембар 2007.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. (*30 poena*) Дата је структура $(X, \circ)$, при чему је

$$X = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$$

и операција $\circ$ је задата на следећи начин:

$$(a, b, c) \circ (m, n, p) = (am, b + n, ap + bm + cn).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(X, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(X, \circ)$ група? Да ли је структура $(X, \circ)$ Абелова група?

2. (*30 poena*) У зависности од реалних параметара λ и ℓ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & \ell \\ 3x & + & 2y & - & z & = & \lambda \\ -3x & - & 2y & + & \lambda \cdot z & = & 0. \end{array}$$

3. (*40 poena*) Дате су права q и раван π у простору:

$$q\colon \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{3} \qquad \text{и} \qquad \pi\colon 2x + 10y - 2z - 5 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_q$ праве q.

б) Одредити произвољне тачке $Q \in q$ и $P \in \pi$.

в) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π.

г) Одредити међусобни положај праве q и равни π.

д) Израчунати растојање тачке Q до равни π.

е) Израчунати величину угла између вектора $\vec{v}_q$ и $\vec{n}_\pi$.

А **I колоквијум из Математике 1** **А**

15. новембар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(A,\cdot)$, при чему је

$$A = \left\{ a - b\sqrt{5} \ \mid \ a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A,\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A,\cdot)$ група? Да ли је структура $(A,\cdot)$ Абелова група?

2. Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Проверити да ли је матрица $A + B$ регуларна, па ако јесте решити матричну једначину

$$XA - C = -XB.$$

3. У зависности од реалног параметра α решити систем $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & \alpha \cdot z & = & 7 \end{array}$.

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}, \qquad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}, \qquad \vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\lambda\vec{k} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности λ_1 и λ_2 параметра λ за које су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни.

б) За $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$ изразити вектор $\vec{a}$ помоћу вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. Одредити раван α која садржи праву p и тачку A, где је

$$p\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{-2}, \qquad A(3,2,0).$$

Б # I колоквијум из Математике 1 Б

15. новембар 2008.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(A, \cdot)$, при чему је

$$A = \left\{ a\sqrt{3} - b \ \mid \ a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, \cdot)$ група? Да ли је структура $(A, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & b \end{vmatrix}$. За које вредности параметра b је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра β решити систем $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & \beta \cdot w & = & 7 \end{array}$.

4. Дате су тачке

$$A(1,1,1), \qquad B(2,0,2), \qquad C(2,2,2), \qquad D(3,4,-3).$$

а) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине тетраедра из темена D.

5. Одредити раван α која садржи праву p и тачку A, где је

$$p\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}, \qquad A(2,-1,1).$$

В # I колоквијум из Математике 1 **В**

15. новембар 2008.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 4 & w \end{vmatrix}$. За које вредности параметра w је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра ν решити систем $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ -x & & & + & z & = & \nu \end{array}$.

4. Дати су вектори

$$e_1 = (3, -2, 1), \qquad e_2 = (2, 1, 2), \qquad e_3 = (3, -1, -2).$$

а) Доказати да вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу простора $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити координате вектора $x = (4, -4, -3)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5. Одредити угао φ између правих p и q, где је

$$p\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{2}, \qquad q\colon \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 2y & - & z & + & 3 & = & 0 \\ x & + & y & & & - & 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Г # I колоквијум из Математике 1 Г

15. новембар 2008.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -x \\ 0 & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверити да ли је матрица $2A + B$ регуларна, па ако јесте решити матричну једначину

$$2XA = C - XB.$$

3. У зависности од реалног параметра Γ решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & 2w & = & 0 \\ -x & + & y & & & + & 2w & = & -5 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & \Gamma \cdot w & = & 5 \end{array}.$$

4. Вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу неког векторског простора. Ако је

$$\begin{array}{rcrcrcrl} a & = & 3e_1 & + & me_2 & + & 3e_3, & \\ b & = & me_1 & + & 5e_2 & + & 4e_3, & \\ c & = & e_1 & + & 3e_2 & + & 2e_3, & \qquad (m \in \mathbb{R}) \end{array}$$

испитати линеарну зависност вектора a, b и c у зависности од параметра m.

5. Одредити угао φ између правих p и q, где је

$$p\colon \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 5 & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & - & 2 & = & 0 \end{array} \right., \qquad q\colon \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

Д I колоквијум из Математике 1 Д

15. новембар 2008.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(A, *)$, при чему је

$$A = (3, +\infty)$$

и нека је операција $*$ задата на следећи начин:

$$x * y = 3xy - 9x - 9y + 30.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра δ решити систем $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & + & w & = & 7 \\ -x & + & y & & & + & w & = & \delta \end{array}$.

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = (m-3, 3, -1), \qquad \vec{b} = (1, -1, 3), \qquad \vec{c} = (1, m+4, -11) \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра m тако да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ буду линеарно зависни.

б) За вредност m из дела под а), која је цео број, изразити вектор $\vec{c}$ помоћу вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. Одредити раван α која садржи праву p и паралелна је правој q, где је

$$p\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \qquad q\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}.$$

Е I колоквијум из Математике 1 Е

15. новембар 2008.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(A, *)$, при чему је

$$A = (-3, +\infty)$$

и нека је операција $*$ задата на следећи начин:

$$x * y = 2xy + 6x + 6y + 15.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра ε решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & 10y & - & 6z & = & 2 \\ -2x & + & 3y & - & 7z & = & \varepsilon \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array}.$$

4. Дате су тачке

$$A(2, -3, 5), \qquad B(0, 2, 1), \qquad C(-2, -2, 3), \qquad D(3, 2, 4).$$

а) Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

б) Израчунати дужину висине тетраедра из темена A.

5. Одредити раван α која садржи праву p и паралелна је правој q, где је

$$p\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{1}, \qquad q\colon \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Л I колоквијум из Математике 1 Л

15. новембар 2008.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & (2\lambda+4)z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & (\lambda+2)z & = & -4 \end{array}.$$

4. Дати су вектори

$$e_1 = (2, -3, 1), \qquad e_2 = (3, -1, 5), \qquad e_3 = (1, -4, 3).$$

а) Доказати да вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу простора $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити координате вектора $x = (2, -2, 7)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$.

5. Раван α је одређена тачкама A, B и C. Одредити растојање тачке D од равни α, ако је

$$A(1, 1, 0), \qquad B(1, 0, -1), \qquad C(3, 1, 1), \qquad D(2, 0, 1).$$

I колоквијум из Математике 1

M

15. новембар 2008.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$, при чему је

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 & v \\ v & 0 & -u \\ u & 0 & v \end{bmatrix} : u, v \in \mathbb{R}, u^2 + v^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица.
Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра μ решити систем
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & 2z & = & -5 \\ 3x & + & 2y & + & \mu \cdot z & = & 5 \end{array}.$$

4. Вектори e_1, e_2 и e_3 образују базу неког векторског простора. Ако је

$$\begin{array}{rcrcrcrl} a & = & 3e_1 & + & (m+2)e_2 & + & 5e_3, & \\ b & = & 2e_1 & + & 3e_2 & + & e_3, & \\ c & = & (m+1)e_1 & + & 9e_2 & + & 3e_3, & \qquad (m \in \mathbb{R}) \end{array}$$

испитати линеарну зависност вектора a, b и c у зависности од параметра m.

5. Раван α је одређена тачкама A, B и C. Одредити растојање тачке D од равни α, ако је

$$A(0,2,-1), \qquad B(4,1,2), \qquad C(-4,0,-4), \qquad D(1,-3,1).$$

A I колоквијум из Математике 1 A

19. новембар 2009.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ aI + bJ \mid a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & a & 8 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$. За које вредности параметра a је $D = 0$?

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & - & y & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 4y & + & \alpha \cdot z & = & 6-\alpha \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 4. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(1,3,-1)$, $B(3,3,1)$, $C(2,1,\alpha)$ и $D(4,4,-1)$.

а) Одредити вредности параметра α тако да запремина пирамиде $ABCD$ буде $\dfrac{5}{3}$.

б) За најмању вредност α одређену под а) израчунати меру угла $\sphericalangle ABC$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x-2}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+3}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x - y + 5z + 9 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Б I колоквијум из Математике 1 Б

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и нека је

$$\mathcal{M} = \{aX + bY \mid a, b \in \mathbb{R},\ ab \neq 0\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & b & 5 \\ 2 & 0 & -2 & b \end{vmatrix}$. За које вредности параметра b је $D \neq 0$?

3. У зависности од реалног параметра β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & 2z & + & w & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & (\beta-5)z & + & (2-\beta)w & = & \beta^2+5 \\ -2x & - & 2y & + & 4z & - & 2w & = & -4. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(3,-1,1)$, $N(\beta,0,2)$, $P(3,-2,2)$ и $Q(5,-1,4)$.

а) Одредити вредности параметра β тако да запремина пирамиде $MNPQ$ буде $\dfrac{4}{3}$.

б) За највећу вредност β одређену под а) израчунати меру угла $\sphericalangle MNP$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x+y+3=0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Φ I колоквијум из Математике 1 Φ

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и нека је $*$ операција дефинисана са

$$(a,b) * (c,d) = (ad + bc,\, bd - ac).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су дате матрице $F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и F.

Одредити матрицу

$$2F^{-1} + G \cdot (F - I)^T.$$

3. У зависности од реалног параметра f решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ -2x & - & y & + & f \cdot z & = & f. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(1,2,3)$, $N(3,1,\phi+1)$, $P(1,\phi+2,2)$ и $Q(3,-1,4)$.

а) За које вредности параметра ϕ су вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$ компланарни.

б) За најмању вредност ϕ одређену под а) изразити вектор $\overrightarrow{MN}$ преко вектора $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MQ}$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ -x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon\ -x + 3y - z - 5 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Г # I колоквијум из Математике 1 **Г**

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и нека је $*$ операција дефинисана са

$$(x,y) * (u,v) = (xu - yv,\, yu + xv).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су дате матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Одредити матрицу

$$A^{-1} + B^T \cdot (A - 2I).$$

3. У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ -2x & - & y & - & 3z & = & \gamma. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(-1,1,-1)$, $B(\gamma,1,0)$, $C(1,-2,-2)$ и $D(-5,\gamma+2,0)$.

а) За које вредности параметра γ су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$ линеарно зависни.

б) За највећу вредност γ одређену под а) изразити вектор $\overrightarrow{CD}$ преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} x + 3y + 2z - 4 = 0 \\ -x - 4y + z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x + 7y + z + 2 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

Д I колоквијум из Математике 1 Д

19. новембар 2009.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је $A = (-2, \infty)$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = 3xy + 6(x + y) + 10.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X + 2B \cdot X = C.$$

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & + & (d-6)z & = & d+6 \\ -2x & - & 4y & + & 6z & = & -2. \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{m} = (3, 3, -2), \qquad \vec{n} = (1, 2\delta, 4), \qquad \vec{p} = (3, -3, 2) \qquad (\delta \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра δ тако да вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ буду линеарно зависни.

б) За највећу вредност δ одређену под а) изразити вектор $\vec{n}$ помоћу вектора $\vec{m}$ и $\vec{p}$.

5. Дате су права a и права b у простору:

$$a\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{4} \qquad \text{и} \qquad b\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1}.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор правца $\vec{v}_b$ праве b.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in b$.

в) Одредити међусобни положај праве a и праве b.

д) Уколико се права a и права b секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

E # I колоквијум из Математике 1 **E**

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & -a \\ 0 & a & b \end{bmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & \varepsilon & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра ε.

3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & (e-4)z & = & 10-e \\ 3x & + & y & - & 4z & = & 3. \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = (4, 2, 3\varepsilon), \qquad \vec{b} = (1, -2, 4), \qquad \vec{c} = (2, 2, -1) \qquad (\varepsilon \in \mathbb{R}).$$

а) Одредити вредности параметра δ тако да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ буду компланарни.

б) За највећу вредност ε одређену под а) изразити вектор $\vec{a}$ помоћу вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. Дате су 4 тачке у простору:

$$A(-3, -1, 5), \qquad B(5, 5, 1), \qquad C(3, 1, 3), \qquad D(3, 2, -1).$$

а) Одредити раван α је одређена тачкама A, B и C.

б) Одредити једначину нормале n из тачке D на раван α.

в) Одредити вектор правца $\vec{v}_n$ праве n и вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α.

д) Одредити растојање тачке D од равни α.

Л I колоквијум из Математике 1 Л

19. новембар 2009.

______________________	______________	__________
презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & -y & x \\ y & x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Испитати ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & \lambda & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра ℓ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & + & 3u & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 4z & + & 5u & = & 1 \\ -2x & + & (\ell-2)y & + & (4-2\ell)z & + & (10-4\ell)u & = & 2. \end{array}$$

4. Дати су вектори

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}, \qquad \vec{b} = -2\vec{j} + 3\vec{k}, \qquad \vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \lambda\vec{k} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

а) Ако су вектори $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$, одредити $\vec{u} \times \vec{v}$.

б) За коју вредност реалног параметра λ су вектори $\vec{c}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ колинеарни?

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon x + 2y - z - 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon\ -x + y + z + 2 = 0.$$

а) Одредити вектор вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

д) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

M **I колоквијум из Математике 1** M

19. новембар 2009.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $A = (1, \infty)$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = 3xy - 3(x + y) + 4.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X = 2B \cdot X + C.$$

3. У зависности од реалног параметра m решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -2 \\ 2x & + & 4y & + & (m-5)z & = & -2m-6 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & = & 2 \end{array}.$$

4. Дати су вектори

$$\vec{m} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{n} = \vec{i} - 3\vec{k}, \qquad \vec{p} = 6\vec{i} + \mu\vec{j} + 2\vec{k} \qquad (\mu \in \mathbb{R}).$$

а) Ако су вектори $\vec{u} = \vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{v} = \vec{n} + 2\vec{m}$, одредити $\vec{u} \times \vec{v}$.

б) За коју вредност реалног параметра μ су вектори $\vec{c}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ линеарно зависни?

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon 2x - 4y - 8z + 5 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1.$$

а) Одредити вектор вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

д) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

A   I колоквијум из Математике 1   A

20. новембар 2010.

презиме и име студента   број индекса   група за вежбе

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad a \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & -a & -1 \\ 3 & -3 & 0 & a \end{vmatrix}$. За које вредности параметра a је $D \leqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & \alpha \cdot z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(2, \alpha, 2)$, $B(1,1,3)$, $C(3,4,3)$ и $D(1,2,5)$.

а) За коју вредност параметра α важи $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$?

б) За вредности параметра α одређене под а) проверити да ли су тачке A, B, C, D компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{AD}$, преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(3,-1,-3), \qquad R(-2,-1,0), \qquad S(1,2,-3), \qquad T(2,0,-2); \qquad p\colon \begin{cases} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке R, S и T, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq R$, $M \neq S$, $M \neq T$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку Q.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку S.

Б **I колоквијум из Математике 1** Б

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}, 2a^2 + b^2 \neq 0\}$ и $*$ дефинисана са

$$(a,b) * (x,y) = (ay + bx, by - 2ax).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Нека су $F = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и F. Одредити матрицу

$$3F^{-1} + G \cdot (F + 2I)^{\mathrm{T}}.$$

3. У зависности од реалног параметра b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & 6z & = & b \\ -2x & + & b \cdot y & + & 4z & = & b. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(3,1,-1)$, $B(\lambda,-3,1)$, $C(2,-1,1)$ и $D(2,-\lambda,2)$.

а) За коју вредност параметра λ су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ колинеарни?

б) За вредности параметра λ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(-1,0,1), \qquad R(-2,-3,1), \qquad S(5,4,3), \qquad T(4,2,5); \qquad p\colon \begin{cases} 2x + y + z - 6 = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке S и T, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $A \in q$ ($A \neq S$, $A \neq T$).

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку Q, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку R.

Φ I колоквијум из Математике 1 Φ

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 5x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & f & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ f & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. За које вредности параметра f је $D \geqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра ϕ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 3y & + & (\phi-5)z & + & (2-\phi)w & = & 0 \\ -2x & - & 2y & + & 4z & - & 2w & = & 0. \\ x & + & y & - & 2z & + & w & = & 0 \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(-1,2,2)$, $N(2\beta,1,3)$, $P(-2,4,5)$ и $Q(-4,4,3)$.

а) За коју вредност параметра β важи $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{11}$?

б) За вредности параметра β одређене под а) проверити да ли су тачке M, N, P, Q компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{MQ}$, преко вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $MNPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(4,0,-2), \qquad B(3,1,-1), \qquad C(2,3,-2), \qquad D(-1,0,1); \qquad p\colon \left\{ \begin{array}{r} x-y+2z-2=0 \\ 2x+y+z-10=0. \end{array} \right.$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке B, C и D, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq B$, $M \neq C$, $M \neq D$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку A.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку C.

Г   **I колоквијум из Математике 1**   Г

20. новембар 2010.

________________________   ____________   ________

презиме и име студента   **број индекса**   **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ и $\circ$ дефинисана са

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac - 3bd, ad + bc).$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ Абелова група?

2. Нека су $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$ и I означава јединичну матрицу истог реда као и A. Одредити матрицу

$$2A^{-1} + B^{\mathrm{T}} \cdot (A + 2I).$$

3. У зависности од реалног параметра γ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -2x & + & \gamma \cdot y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & \gamma. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(1, 0, \phi)$, $N(-1, 2, -1)$, $P(3, 2, 1)$ и $Q(4 - 2\phi, -1, 1)$.

а) За коју вредност параметра ϕ су вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ колинеарни?

б) За вредности параметра ϕ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle MNP$ и $\triangle MPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(-3, 1, 2), \qquad B(-4, -2, 2), \qquad C(2, 3, 6), \qquad D(3, 5, 4); \qquad p\colon \begin{cases} -4x + y - z - 9 = 0 \\ 2x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке C и D, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $M \in q$ $(M \neq C,\ M \neq D)$.

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку A, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $N \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку B.

Д I колоквијум из Математике 1 Д

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = [5, +\infty)$ и $*$ дефинисана са

$$a * b = 2ab - 10(a+b) + 55.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(A, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A, *)$ група? Да ли је структура $(A, *)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$3A + X \cdot B = C^{\mathrm{T}}.$$

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & d^2 + 4d - 7 \\ 3x & - & 6y & + & d \cdot z & = & 6 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 6. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(-1, 3-2\mu, 0)$, $N(1, -2, -1)$, $P(5, 8, 1)$ и $Q(-3, -4, 1+\mu)$.

а) За коју вредност параметра μ су вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ колинеарни?

б) За вредности параметра μ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle MNQ$ и $\triangle NPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(4,-3,-3), \qquad B(-1,-3,0), \qquad C(2,0,-3), \qquad D(3,-2,-2); \qquad p\colon \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x + 2y + z - 10 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке B, C и D, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq B$, $M \neq C$, $M \neq D$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку A.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку C.

I колоквијум из Математике 1

20. новембар 2010.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице система

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & \varepsilon - 4 & -2\varepsilon - 8 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра ε.

3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 6y & + & (e+2)z & = & 0 \\ -2x & + & (e-1)y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 2z & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 3 - 2\gamma, 0)$, $C(5, 2, 3)$ и $D(3, 1, 1 + \gamma)$.

а) За које вредности параметра γ важи $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

б) За вредности параметра γ одређене под а) проверити да ли су тачке A, B, C, D компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{AD}$, преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $ABCD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(0, 1, 2), \qquad R(-1, -2, 2), \qquad S(5, 3, 6), \qquad T(6, 5, 4); \qquad p\colon \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 10 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке S и T, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $A \in q$ ($A \neq S$, $A \neq T$).

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку Q, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку R.

Л I колоквијум из Математике 1 Л

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 2a & -2a & a \end{pmatrix} \quad : \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице система

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 & 2 - \lambda & \lambda^2 + 5 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра λ.

3. У зависности од реалног параметра L решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & (L-3) \cdot z & = & 0 \\ L \cdot x & - & 3y & + & 5z & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $A(1, 0, 3)$, $B(2\lambda - 3, -3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ и $D(1, 1 + 3\lambda, -2)$.

а) За коју вредност параметра λ су вектори $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ колинеарни?

б) За вредности параметра λ одређене под а) одредити однос површина троуглова $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$.

5. Дате су тачке Q, R, S и T, као и права p у простору:

$$Q(0, -2, 1), \qquad R(-1, -5, 1), \qquad S(6, 2, 3), \qquad T(5, 0, 5); \qquad p\colon \begin{cases} 2x + y + 2z - 4 = 0 \\ -4x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину праве q која садржи тачке S и T, вектор правца $\vec{v}_q$ праве q, као и координате произвољне тачке $A \in q$ $(A \neq S,\ A \neq T)$.

б) Одредити једначину равни π која је паралелна са правама p и q и садржи тачку Q, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$.

в) Одредити праву r која је нормална на раван π и садржи тачку R.

M I колоквијум из Математике 1 M

20. новембар 2010.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{A} = (3, +\infty)$ и $\circ$ дефинисана са

$$x \circ y = 2xy - 6(x+y) + 21.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \circ)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$A \cdot X - 2B^{\mathrm{T}} = C.$$

3. У зависности од реалног параметра M решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & + & w & = & 0 \\ 2x & + & (M-2)\cdot y & + & (M+4)\cdot z & - & 3w & = & -2 \\ 3x & + & 2y & + & 11z & - & 3w & = & 0. \end{array}$$

4. Дате су тачке $M(2,0,5)$, $N(1+\delta,2,8)$, $P(1,-3,3)$ и $Q(3,2\delta-2,2)$.

а) За које вредности параметра δ важи $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{PQ}|$?

б) За вредности параметра δ одређене под а) проверити да ли су тачке M, N, P, Q компланарне и уколико су тачке компланарне изразити вектор $\overrightarrow{MQ}$, преко вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}$, а у супротном израчунати запремину пирамиде $MNPQ$.

5. Дате су тачке A, B, C и D, као и права p у простору:

$$A(1,0,-2), \quad B(0,1,-1), \quad C(-1,3,-2), \quad D(-4,0,1); \qquad p\colon \begin{cases} 3x+2y+z-7=0 \\ x+y \qquad -3=0. \end{cases}$$

а) Одредити једначину равни π која садржи тачке B, C и D, вектор нормале $\vec{n}_\pi$ равни π, као и координате произвољне тачке $M \in \pi$ ($M \neq B$, $M \neq C$, $M \neq D$).

б) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и произвољну тачку P са ове праве ($P \in p$).

в) Одредити праву q која је паралелна правој p и садржи тачку A.

г) Одредити раван α која је нормална на праву q и садржи тачку C.

A I колоквијум из Математике 1 A

3. децембар 2011.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{a} & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} : \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & m & 5 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра m.

3. У зависности од реалног параметра α решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & 4w & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & - & w & = & -1 \\ 3x & + & \alpha \cdot y & - & 2z & + & 3w & = & 1. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-1, -2, 1)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити запремину тетраедра (пирамиде) коју чине вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а у супротном изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Одредити вредност параметра λ тако да вектор $\vec{d} = (1, 2, \lambda)$ буде компланаран са векторима $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$.

5. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} 2x + y - z - 6 = 0 \\ -x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 3x - y - z - 7 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

г) Уколико се права a и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити растојање праве a од равни β.

д) Одредити растојање од координатног почетка O до праве a, $d(O, a)$.

Б I колоквијум из Математике 1 Б

3. децембар 2011.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ операција $*$ дефинисана са

$$a * b = a + b - 1.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{R}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ Абелова група?

2. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, тј. за које важи $A \cdot X = X \cdot A$. Објаснити ког облика мора бити матрица X.

3. У зависности од реалног параметра β решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & (2-\beta)z & = & 0 \\ (\beta-5)x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (\beta+1)y & - & 2z & = & 0. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 2, 4)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити запремину тетраедра (пирамиде) коју чине вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а у супротном изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Одредити вредност параметра λ тако да вектор $\vec{d} = (-3, 3, \lambda)$ буде компланаран са векторима $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$.

5. Нека су дате тачка M и права p у простору:

$$M(1, -2, 3), \qquad p: \ \frac{x}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{-1}.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и координате произвољне тачке $P \in p$.

б) Одредити раван α која садржи тачку M и нормална је на праву p.

в) Одредити тачку продора праве p кроз раван α (то је баш пројекција тачке M на праву p, тј. $p \cap \alpha$).

г) Одредити растојање тачке M од праве p.

д) Одредити једначину праве q која садржи тачку M и нормална је на праву p.

Φ I колоквијум из Математике 1 Φ

3. децембар 2011.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, \ b \in \mathbb{R}, \ a > 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & f & 2 & 1 \\ 2 & 2f+1 & 3 & f \\ 3 & f-2 & 2 & -17 \end{pmatrix}$$

у зависности од реалног параметра f.

3. У зависности од реалног параметра ϕ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} \phi \cdot x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & y & + & z & = & 4. \end{array}$$

4. Нека су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такви да важи

$$|\vec{a}| = 1, \qquad |\vec{b}| = 4, \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{12}.$$

и угао између њих није туп.

а) Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни?

б) Одредити вредност скаларног производа $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални?

в) Израчунати површину троугла конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

г) Израчунати вредност скаларног производа $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

5. Дате су праве p и q у простору:

$$p\colon \frac{x}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{1} \qquad \text{и} \qquad q\colon \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p и вектор правца $\vec{v}_q$ праве q.

б) Одредити произвољне тачке $P \in p$ и $Q \in q$.

в) Одредити међусобни положај праве p и праве q.

г) Уколико се права p и права q секу одредити њихов пресек као и једначину (једне) равни π коју одређују праве p и q, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање, $d(p,q)$, као и тачку продора T праве p кроз xOy раван.

Г I колоквијум из Математике 1 Г

3. децембар 2011.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Нека је у скупу реалних бројева $\mathbb{Z}$ операција $\star$ дефинисана са

$$a \star b = a + b + 3.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{Z}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{Z}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{Z}, \star)$ Абелова група?

2. Одредити све матрице X које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, тј. за које важи $A \cdot X = X \cdot A$. Објаснити ког облика мора бити матрица X.

3. У зависности од реалног параметра d решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 5y & + & (d-3)z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & 6z & = & 10 \\ 4x & + & d \cdot y & + & 5z & = & 13. \end{array}$$

4. Нека су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такви да важи

$$|\vec{a}|^2 = 9, \qquad |\vec{b}|^2 = 8, \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = 6$$

и угао између њих није туп.

а) Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни?

б) Одредити вредност скаларног производа $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Да ли су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални?

в) Израчунати површину троугла конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

г) Израчунати вредност скаларног производа $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$.

5. Нека су дате тачка S и права p у простору:

$$S(1,1,2), \qquad p: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 4z + 11 = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p, као и координате произвољне тачке $P \in p$.

б) Одредити раван α која садржи тачку S и нормална је на праву p.

в) Одредити тачку продора праве p кроз раван α (то је баш пројекција тачке S на праву p, тј. $p \cap \alpha$).

г) Одредити растојање тачке S од праве p.

д) Одредити једначину праве q која садржи тачку S и нормална је на праву p.

Д I колоквијум из Математике 1 Д

3. децембар 2011.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Дата је структура $(A,+)$, при чему је

$$A = \{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{N}\}$$

и $+$ је операција сабирања полинома.

Испитати које од следећих особина има структура $(A,+)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(A,+)$ група? Да ли је структура $(A,+)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$RX + Q = 2P^{\mathrm{T}}X.$$

3. У зависности од реалног параметра ϕ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} \phi \cdot x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & 3y & + & z & = & 4. \end{array}$$

4. Дата су 4 вектора у векторском простору $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = (1,2,5), \qquad \vec{b} = (2,3,4), \qquad \vec{c} = (1,5,6), \qquad \vec{d} = (4,7,14).$$

а) Да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$?

б) Показати да се вектор $\vec{c}$ не може изразити преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а да вектор $\vec{d}$ може. Изразити вектор $\vec{d}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Израчунати запремину паралелопипеда (призме) конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. Дате су праве p и q у простору:

$$p\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7} \qquad \text{и} \qquad q\colon \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_p$ праве p и вектор правца $\vec{v}_q$ праве q.

б) Одредити произвољне тачке $P \in p$ и $Q \in q$.

в) Одредити међусобни положај праве p и праве q.

г) Уколико се права p и права q секу одредити њихов пресек као и једначину (једне) равни π коју одређују праве p и q, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање, $d(p,q)$, као и тачку продора T праве p кроз xOy раван.

E I колоквијум из Математике 1 E

3. децембар 2011.

презиме и име студента	број индекса	група за вежбе

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$, при чему је a реалан број.

За које вредности параметра a је $D \leqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра e решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & w & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ 4x & + & 3y & & & + & e \cdot w & = & 0. \end{array}$$

4. Дата су 4 вектора у векторском простору $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = (1, -2, 4), \qquad \vec{b} = (2, 3, 1), \qquad \vec{c} = (4, 5, 6), \qquad \vec{d} = (4, 13, -5).$$

а) Да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$?

б) Показати да се вектор $\vec{c}$ не може изразити преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а да вектор $\vec{d}$ може. Изразити вектор $\vec{d}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

в) Израчунати запремину паралелопипеда (призме) конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. Нека су дате тачка B и раван α у простору:

$$B(2, 3, -1), \qquad \alpha : \; 2x + y - 4z + 5 = 0.$$

а) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α, као и координате произвољне тачке $A \in \alpha$.

б) Одредити једначину праве n која садржи тачку B и нормална је на раван α.

в) Одредити координате пројекције P тачке B на раван α (то је продор праве n кроз раван α, тј. $n \cap \alpha$).

г) Одредити координате симетричне тачке B' тачки B у односу на раван α (важи $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PB'}$).

д) Одредити растојање тачке B' од равни α.

Л I колоквијум из Математике 1 Л

3. децембар 2011.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 & a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} : \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ b \neq 0 \right\}$$

и $\cdot$ означава операцију множења матрица. Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M}, \cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M}, \cdot)$ Абелова група?

2. Израчунати детерминанту $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x & y & x+y \\ 0 & y & x+y & x \\ 0 & x+y & x & y \end{vmatrix}$, при чему су x и y реални бројеви и $y > 0$.

За које вредности параметра x је $D \geqslant 0$?

3. У зависности од реалног параметра λ решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & z & + & u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4u & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11u & = & \lambda. \end{array}$$

4. Дата су 3 узастопна темена паралелограма $ABCD$: $A(0,1,0)$, $B(1,\lambda,1)$ и $C(0,2,1)$, где је λ реалан параметар.

а) Одредити координате четвртог темена паралелограма D.

б) Израчунати векторски производ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$.

в) Одредити вредности λ тако да је површина паралелограма $ABCD$ једнака $\sqrt{3}$.

г) За најмању вредност λ одређену под в) израчунати дужину висине из темена C на страницу AB, као и величину угла $\sphericalangle CAB$.

5. Дате су раван α и раван β у простору:

$$\alpha\colon 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x - y + z + 5 = 0.$$

а) Одредити вектор вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ на раван α и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ на раван β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај равни α и равни β.

г) Уколико се раван α и раван β секу одредити њихов пресек, а ако се не секу одредити њихово међусобно растојање.

д) Одредити растојање од координатног почетка O до равни α, $d(O,\alpha)$.

M **I колоквијум из Математике 1** **M**

3. децембар 2011.

______________________ ______________ ______________

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Дата је структура $(\mathcal{M},\cdot)$, при чему је

$$\mathcal{M}=\left\{\frac{2a-1}{2b-1}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{N}\right\}$$

и $\cdot$ је операција множења рационалних бројева.

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{M},\cdot)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{M},\cdot)$ Абелова група?

2. Дате су матрице $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\0&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Решити матричну једначину

$$3X+B^{\mathrm{T}}=A\cdot X.$$

3. У зависности од реалног параметра m решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&z&=&4\\ 2x&+&m\cdot y&+&2z&=&6\\ x&+&m\cdot y&+&z&=&4.\end{array}$$

4. Дата су 3 узастопна темена паралелограма $ABCD$: $A(1,2,0)$, $B(1,3,1)$ и $C(\lambda,2,2)$, где је λ реалан параметар.

а) Одредити координате четвртог темена паралелограма D.

б) Израчунати векторски производ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$.

в) Одредити вредности λ тако да је површина паралелограма $ABCD$ једнака 2.

г) За све вредности λ одређене под в) израчунати дужину висине из темена A на страницу BC, као и величину угла $\sphericalangle ACB$.

5. Нека су дате тачка B и раван α у простору:

$$B(3,2,1),\qquad \alpha:\ 2x+y+z-3=0.$$

а) Одредити вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α, као и координате произвољне тачке $A\in\alpha$.

б) Одредити једначину праве n која садржи тачку B и нормална је на раван α.

в) Одредити координате пројекције P тачке B на раван α (то је продор праве n кроз раван α, тј. $n\cap\alpha$).

г) Одредити растојање тачке B од равни α.

д) Одредити једначину равни β која садржи тачку B и паралелна је равни α.

I колоквијум из Математике 1

1.

1. децембар 2012.

______________________________ презиме и име студента

______________ број индекса

__________ група за вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$a \star b = 2a + 2b - ab - 2, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ a & 8 & -2 & 5a-1 \\ 1 & -a & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

у зависности од реалног параметра a.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & -4 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & (b+3)z & = & 4 \\ 2x & - & y & & & = & a+2. \end{array}$$

4. Дате су праве $p : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ и $q : \begin{cases} x + 2y - 2z - 3 = 0 \\ 2x + y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$.

а) Испитати међусобни положај праве p и праве q.

б) Одредити једначину равни која садржи праву p и паралелна је правој q, као и растојање $d(p, q)$ између правих p и q.

2. I колоквијум из Математике 1 2.

1. децембар 2012.

презиме и име студента | број индекса | група за вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, (a,b) \neq (0,0)\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$(a,b) \star (c,d) = (ac - 4bd, ad + bc), \qquad (a,b),(c,d) \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ Абелова група?

2. Одредити вредности реалног пареметра m за које важи

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -1 & -2(m+1) & -7 & 0 \\ -4 & -2(3m+4) & m-12 & -6 \\ 2 & 2(3m+2) & 24 & -10 \end{vmatrix} > 0.$$

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & -3 \\ 3x & - & 3y & + & (b+6)z & = & 3 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & 2a+3. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (-2,7,0)$, $\vec{e}_2 = (1,-1,-1)$ и $\vec{e}_3 = (-3,5,1)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити координате вектора $\vec{v} = (2,2,2)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

I колоквијум из Математике 1

3.

1. децембар 2012.

презиме и име студента | број индекса | група за вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$a \star b = 3a + 3b - ab - 6, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, \star)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, \star)$ Абелова група?

2. Нека је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Одредити све реалне вредности λ, такве да матрична једначина

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

има решења (по v), где је v матрица облика 3×1 и није нула-матрица.

б) За сваки λ одређен у делу под а) наћи све матрице v које задовољавају претходну матричну једначину.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & w & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & az & & & = & -3 \\ x & - & 2y & + & (a-1)z & + & (b+3)w & = & 2b. \end{array}$$

4. Нека су дате равни $\alpha : 2x - y + 3 = 0$ и $\beta : x + y + z - 2 = 0$ и тачка $T(1, 1, -1)$.

а) Одредити једначину равни π која садржи пресек равни α и β и тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију тачке T на раван β као и растојање $d(T, \beta)$ тачке T од равни β.

4. **I колоквијум из Математике 1** **4.**

1. децембар 2012.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ операција $*$ дефинисана са

$$a * b = \sqrt[5]{a^5 + b^5}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{R}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{R}, *)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$XM - 4A^T = 2X,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ и $M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & (a+2)z & - & 3w & = & -2 \\ x & - & 2y & + & (a-2)z & + & (b+4)w & = & 2b-2. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (-2, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -2, 0)$ и $\vec{e}_3 = (3, -2, 4)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити координате вектора $\vec{v} = (1, -1, 3)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

I колоквијум из Математике 1

5.

1. децембар 2012.

презиме и име студента	**број индекса**	**група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{B} = (-4, +\infty)$ и операција $\circ$ дефинисана на следећи начин:

$$x \circ y = xy + 4x + 4y + 12, \qquad x, y \in \mathcal{B}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{B}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{B}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{B}, \circ)$ Абелова група?

2. Решити матричну једначину

$$XA = 2X + A^{\top},$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. У зависности од реалног параметра c решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & cy & + & 3z & = & 3 \\ x & - & cy & + & (c-1)z & = & 1. \end{array}$$

4. Дати су вектори $\vec{e}_1 = (-1, -2, 4)$, $\vec{e}_2 = (-4, 3, 0)$ и $\vec{e}_3 = (1, -2, 2)$.

а) Испитати да ли вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Уколико чине базу одредити координате вектора $\vec{v} = (5, 0, -3)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

6. I колоквијум из Математике 1 6.

1. децембар 2012.

презиме и име студента | **број индекса** | **група за вежбе**

1. Нека је $\mathcal{S} = (3, +\infty)$ и операција $\circ$ дефинисана на следећи начин:

$$x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \qquad x, y \in \mathcal{S}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{S}, \circ)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{S}, \circ)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{S}, \circ)$ Абелова група?

2. Одредити вредности реалног параметра p за које важи

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & p+9 & -5 & 16 \\ -3 & p+11 & p-8 & 20 \\ 1 & -2(p+6) & 1 & -3 \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & - & 5w & = & 2 \\ x & + & y & & & - & 5w & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & (a+2)z & - & 10w & = & -6 \\ 2x & - & y & & & + & (b-3)w & = & 1. \end{array}$$

4. Нека су дате праве $p: \frac{x-6}{m} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-1}$ и $q\colon \left\{ \begin{array}{c} x - z - 2 = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{array} \right.$, при чему је m реалан параметар.

а) Одредити вредност параметра m тако да се праве p и q секу, а затим за тако одређену вредност параметра израчунати координате пресечне тачке датих правих.

б) За вредност параметра m одређену у делу а), одредити једначину равни α коју образују праве p и q.

7. I колоквијум из Математике 1 7.

1. децембар 2012.

презиме и име студента | број индекса | група за вежбе

1. Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0\}$ и нека је операција $\star$ дефинисана на следећи начин:

$$(a,b) * (c,d) = (ad + c + d, bd), \qquad (a,b),(c,d) \in \mathcal{A}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathcal{A}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathcal{A}, *)$ Абелова група?

2. Одредити ранг матрице у зависности од реалног параметра a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 14 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 7 & a \end{bmatrix}.$$

3. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & a\,y & + & 4z & = & 3 \\ -x & + & (-a-1)y & + & az & = & -2. \end{array}$$

4. Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{\lambda} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ и тачка $M(4,0,1)$.

а) Одредити параметар λ тако да се праве p и q секу.

б) За тако добијену вредност λ одредити растојање тачке M од равни одређене правама p и q.

8. I колоквијум из Математике 1 8.

1. децембар 2012.

презиме и име студента **број индекса** **група за вежбе**

1. Нека је у скупу рационалних бројева $\mathbb{Q}$ операција $*$ дефинисана са

$$a * b = a^2 + b^2 + a + b, \qquad a, b \in \mathbb{Q}.$$

Испитати које од следећих особина има структура $(\mathbb{Q}, *)$:

затвореност, асоцијативност, неутрални елемент, инверзни елемент, комутативност.

Да ли је структура $(\mathbb{Q}, *)$ група? Да ли је структура $(\mathbb{Q}, *)$ Абелова група?

2. Нека је матрица

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & 16 & -3 \end{pmatrix}.$$

а) Одредити све реалне вредности λ, такве да матрична једначина

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

има решења (по v), где је v матрица облика 3×1 и није нула-матрица.

б) За сваки λ одређен у делу под а) наћи све матрице v које задовољавају претходну матричну једначину.

3. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 0 \\ x & & & + & z & - & 5w & = & 2 \\ 3x & - & 4y & + & (a+2)z & - & 7w & = & -2 \\ x & - & 2y & & & + & (b+4)w & = & b+3. \end{array}$$

4. Нека су дате права a: $\begin{cases} y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$ и раван $\pi : 2x + y - z + 5 = 0$.

а) Испитати међусобни положај праве a и равни π. Уколико су паралелелне одредити растојање праве a од равни π, у супротном одредити продорну тачку праве a кроз раван π.

б) Одредити једначину равни α која садржи праву a и нормална је на раван π.

1. I колоквијум из Математике 1 1.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (c,d) = (a + (-1)^b c, b + d),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} p-5 & 1 & p & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & q & 5 \\ -4 & 0 & 1-2p & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & -1 \\ 2x & + & (5a+1)y & + & 14z & = & 1 \\ 4x & - & 8y & + & 12z & = & b-3. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су праве $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-5}{-1}$ и $q : \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$, раван $\alpha : 5x - y + z - 7 = 0$ и тачка $K(2,-2,1)$.

а) Доказати да се праве p и q секу и одредити пресечну тачку S, као и меру угла који оне образују.

б) Одредити једначину праве која садржи тачке S и K, као и једначину равни која садржи средиште дужи SK и паралелна је равни α.

2. I колоквијум из Математике 1 2.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{C} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$a * b = a^{\log_5 b},$$

за све $a, b \in \mathcal{C}$. Испитати да ли је $(\mathcal{C}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$XAB = S + 2X,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = A^T$ и $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & + & 4z & + & 7w & = & 0 \\ & & y & + & z & + & (7-p)w & = & -1 \\ 3x & + & 8y & + & (3p-4)z & + & 19w & = & q+3. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дати су вектори $\vec{e}_1 = (2,-1,1,0)$, $\vec{e}_2 = (a,0,1,2)$, $\vec{e}_3 = (5,-4,3,0)$ и $\vec{e}_4 = (2,-1,1,a-3)$ у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно независни.

б) За $a = 3$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $\vec{v} = (1,2,-1,0)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

3. I колоквијум из Математике 1 3.

30.11.2013.

презиме и име студента — број индекса

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (c,d) = (a + 2^b c, b + d),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 5 \\ 3x & - & y & - & az & = & a-3 \\ 6x & + & (3a-1)y & - & 5z & = & 14. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су праве $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q : \begin{cases} x - 2y - z - 1 = 0 \\ 3x + y + 5 = 0 \end{cases}$, као и раван $\alpha : x - 2y + z - 5 = 0$

а) Одредити вредност параметра λ тако да права p буде паралелна равни α, и за тако одређен λ одредити једначину равни која садржи праву p и паралелна је са α.

б) За $\lambda = 1$ одредити растојање између правих p и q.

4. I колоквијум из Математике 1 4.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{C} = (0,1) \cup (1, +\infty)$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$a * b = a^{\log_3 b},$$

за све $a, b \in \mathcal{C}$. Испитати да ли је $(\mathcal{C}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$MX + B^T = X,$$

при чему је $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & + & 5w & = & 1 \\ 3x & & & + & 5z & + & aw & = & 0 \\ 5x & + & 4y & + & (5-2a)z & + & (a+10)w & = & b-2. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дати су вектори $\vec{e}_1 = (a+4, 5, 3, 4)$, $\vec{e}_2 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{e}_3 = (2, 2, 2, 5)$ и $\vec{e}_4 = (1, 0, 1, a+4)$ у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно зависни.

б) За $a = 1$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $\vec{v} = (1, 0, -1, 1)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

5. I колоквијум из Математике 1 5.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{M} = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{Q}, a > 0\}$ и $\circ$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b,c) \circ (m,n,p) = (am, bm+n, cm+p),$$

за све $(a,b,c),(m,n,p) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, \circ)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$ABX = 2X - 5C,$$

при чему је $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $A = B^T$ и $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & aw & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & - & (12-3a)w & = & 2 \\ 5x & + & 13y & + & 3(a+1)z & + & (26+a)w & = & b+3. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су равни $\alpha : x - 3y + 2z - 5 = 0$, $\beta : -2x + 6y - mz + 7 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ и тачка $N(4,0,0)$.

а) Одредити вредност параметра m тако да дате равни буду паралелне, и за тако добијени m одредити растојање тачке N од равни β.

б) Одредити нормалну пројекцију тачке N на раван α.

I колоквијум из Математике 1

30.11.2013.

презиме и име студента

број индекса

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\ ,\ a \neq 0\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (x,y) = (-ax, x - bx + y),$$

за све $(a,b),(x,y) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A},\star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра m дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 7y & - & mz & = & -1 \\ -2x & - & my & + & z & = & m \\ 2x & + & 25y & + & (1-4m)z & = & -1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дати су вектори $\vec{e}_1 = (4,-1,-2,10)$, $\vec{e}_2 = (1,a-2,0,2)$, $\vec{e}_3 = (-2,-2,-4,a-8)$ и $\vec{e}_4 = (1,1,2,3)$ у векторском простору $V = (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ и $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вредности параметра a за које су дати вектори линеарно независни.

б) За $a = -1$ испитати да ли дати вектори чине базу векторског простора V. Уколико чине базу, одредити координате вектора $\vec{v} = (1,0,-1,0)$ у тој бази, а у супротном изразити вектор $\vec{e}_1$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$.

7. I колоквијум из Математике 1 7.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{K} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) * (c,d) = (a + 3^b c, b + d),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{K}$. Испитати да ли је $(\mathcal{K}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} a-1 & -1 & a & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & b \\ -1 & 5 & -1-3a & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & - & 3z & = & -7 \\ 3x & - & y & + & (b-4)z & = & b-3 \\ x & - & (2b+1)y & + & 7z & = & 16. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су права $p: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-1}{-5}$, раван $\alpha: x - 2y - 3z + 8$ и тачка $S(1,0,6)$.

а) Одредити једначину равни π садржи праву p и тачку S.

б) Одредити координате тачке K која припада равни π и чија је ортогонална пројекција на раван α тачка $M(0,4,0)$.

8. I колоквијум из Математике 1 8.

30.11.2013.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{S} = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\ ,\ m \neq 0\}$ и $\circ$ бинарна операција дефинисана као:

$$(m,n) \circ (p,q) = (mp, p \cdot (n-1) - q),$$

за све $(m,n),(p,q) \in \mathcal{S}$. Испитати да ли је $(\mathcal{S}, \circ)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити вредности реалног пареметра a за које важи

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & 4 & 9 & 1 \\ 18 & -9 & a-24 & 0 \\ a-3 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} < 0.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 7x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & (1-2a)y & + & 6z & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & = & b+1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Нека су дате праве $p : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z}{-1}$ и $q\colon \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 6x+2y+z+2=0 \end{cases}$, као и тачка $T(5,2,-1)$.

а) Одредити растојање између датих правих.

б) Одредити једначину равни α која садржи тачку T и нормална је на праву p, као и продор праве p кроз раван α.

1. I колоквијум из Математике 1 1.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{K} = \{(x, 2y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 10y^2\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(x, 2y) \star (a, 2b) = (xa + 10by, 2xb + 2ya),$$

за све $(x, 2y), (a, 2b) \in \mathcal{K}$. Испитати да ли је $(\mathcal{K}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 2z & & & = & -3 \\ x & - & 2y & - & az & + & bu & = & b+1 \\ 2x & - & y & - & (2a+1)z & + & bu & = & -3b-1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван α, праве p и q и тачка T:

$$\alpha\colon x + y - z + 1 = 0, \qquad p\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}, \qquad q\colon \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad T(1, 1, -1).$$

а) Одредити јендачину равни β која је паралелна правама p и q и садржи тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван α.

2. I колоквијум из Математике 1 2.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{D} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0\}$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) * (c,d) = (ac - 5bd, ad + bc),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{D}$. Испитати да ли је $(\mathcal{D}, *)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$\left(\frac{1}{3}X + A^T B\right)^{-1} = C,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & - & z & + & 3u & = & 1 \\ 2x & + & (a-1)y & + & 5z & + & 6u & = & 5 \\ 3x & + & 6y & + & 4z & + & (2a+1)u & = & b^2+2. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (2,-2,5), \qquad \vec{b} = (4,-3,4), \qquad \vec{c} = (2,-5,6), \qquad \vec{d} = (8,-7,14).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3. I колоквијум из Математике 1 3.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{A} = \{(5x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(5x, y) \star (5a, b) = (5xb + 5ya, 10xa + yb),$$

за све $(5x, y), (5a, b) \in \mathcal{A}$. Испитати да ли је $(\mathcal{A}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & p+16 & 8 \\ pq-19 & 3 & -5 & -p-40 & p-19 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & ay & + & z & = & 3 \\ 2ax & + & 3y & + & z & = & a+1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван β, праве p и q и тачка T:

$$\beta\colon x + y - z + 3 = 0, \qquad p\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}, \qquad q\colon \begin{cases} x - y - 3z - 1 = 0 \\ x + 3y + 5z - 1 = 0 \end{cases} \qquad T(1, 2, 4).$$

а) Одредити једначину равни α која је нормална на праву q и садржи тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван β.

I колоквијум из Математике 1

4.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{J} = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{R},\ p^2+q^2 \neq 0\}$ и $*$ бинарна операција дефинисана као:

$$(p,q)*(r,s) = (pr - 8qs, rq + ps),$$

за све $(p,q),(r,s) \in \mathcal{J}$. Испитати да ли је $(\mathcal{J},*)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$(AX^{-1})^{-1} = 8B^{-1} + C,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} ax - ay + z &= -a \\ x + ay - z &= a \\ (a+1)x + y - az &= 2. \end{aligned}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (1,1,2), \qquad \vec{b} = (4,-3,1), \qquad \vec{c} = (8,-5,6), \qquad \vec{d} = (8,-13,-5).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

5. I колоквијум из Математике 1 5.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{M} = \{(x, 5y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 40y^2 \neq 0\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(x, 5y) \star (a, 5b) = (ax + 40yb, 5xb + 5ya),$$

за све $(x, 5y), (a, 5b) \in \mathcal{M}$. Испитати да ли је $(\mathcal{M}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 3 \\ 4x & + & y & + & z & = & b \\ x & + & 4y & - & az & = & 5. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван α, праве p и q и тачка T:

$$\alpha\colon x - y + z + 1 = 0, \qquad p\colon \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}, \qquad q\colon \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ -x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \qquad T(1, -3, 5).$$

а) Одредити једначину праве r којој је вектор правца нормалан на праве p и q и пролази кроз тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван α.

6. I колоквијум из Математике 1 6.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 7y^2 \neq 0\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(x, y) \star (a, b) = (xa + 7yb, xb + ya),$$

за све $(x, y), (a, b) \in \mathcal{S}$. Испитати да ли је $(\mathcal{S}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара p и q одредити ранг матрице

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ p+3 & 10 & -1 & -1 & -6 \\ -p-12 & -1 & pq+13 & 4 & q+19 \end{bmatrix}$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & (a+1)y & + & 2(a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2y & + & (3a+1)z & = & 1 \\ 2ax & + & 2ay & + & (3a+1)z & = & a. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \qquad \vec{b} = (1, 1, -2), \qquad \vec{c} = (0, 2, -6), \qquad \vec{d} = (1, -1, 1).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

7. # I колоквијум из Математике 1 **7.**

29.11.2014.

____ ____________

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{D} = \{(8x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(8x, y) \star (8a, b) = (8bx + 8ay, 40xa + yb),$$

за све $(8x, y), (8a, b) \in \mathcal{D}$. Испитати да ли је $(\mathcal{D}, \star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Одредити сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе матрице

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & az & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & (2a+1)z & = & b+1 \\ x & + & 2ay & + & z & = & 1. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дате су раван π, праве p и q и тачка T:

$$\pi\colon x - y + 2z + 3 = 0, \qquad p\colon \frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}, \qquad q\colon \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ -4x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad T(-1, 2, 3).$$

а) Одредити једначину праве r којој је вектор правца нормалан на праве p и q и пролази кроз тачку T.

б) Одредити нормалну пројекцију праве p на раван π.

I колоквијум из Математике 1

8.

29.11.2014.

презиме и име студента **број индекса**

1. (*5 поена*) Нека је $\mathcal{D} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a^2 \neq 9b^2\}$ и $\star$ бинарна операција дефинисана као:

$$(a,b) \star (c,d) = (ac + 9bd, ad + bc),$$

за све $(a,b),(c,d) \in \mathcal{D}$. Испитати да ли је $(\mathcal{D},\star)$ група. Да ли је дата операција комутативна?

2. (*5 поена*) Решити матричну једначину

$$3MX^{-1} = A^T + B,$$

при чему је $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

3. (*5 поена*) У зависности од вредности реалних параметара α и β дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 5z & + & \alpha w & = & 1 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2w & = & \alpha+\beta \\ 6x & - & \alpha y & + & 4z & + & 3w & = & 4. \end{array}$$

4. (*5 поена*) Дата су 4 вектора у векторском простору $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$:

$$\vec{a} = (1,1,-3), \qquad \vec{b} = (1,3,-4), \qquad \vec{c} = (0,2,7), \qquad \vec{d} = (-1,-1,0).$$

а) Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V.

б) Уколико вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине базу векторског простора V, изразити вектор $\vec{d}$ као њихову линеарну комбинацију. У супротном, изразити вектор $\vec{a}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: I Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ____

Z A D A C I :

1. Ako je

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ t\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbf{Q} \ \wedge \ s \neq 0 \ \wedge \ s - t = 1 \right\}$$

i operacija $*$ množenje matrica, ispitati da li je $(A, *)$ grupa. Da li je $(A, *)$ Abelova grupa?

2. U zavisnosti od realnih parametara p i q diskutovati i rešiti sistem lineranih jednačina:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 2y & + & z & + & 3u & = & 2 \\ 6x & + & 4y & + & pz & + & qu & = & 3 \\ 6x & + & 8y & + & 2pz & + & (2q+3)u & = & q+4 \end{array}$$

3. Date su prave $p : \begin{cases} x + y + 2z - 2 = 0 \\ 2x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$, $s : \dfrac{x-2}{\lambda} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-5}{1}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i ravan $\gamma : x + y + z + 1 = 0$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra λ za koji se prave p i s seku, i za tako određenu vrednost paramtera λ izračunati rastojanje presečne tačke datih pravih od ravni γ.

b) Odrediti jednačinu prave r koja sadrži tačku $R(1, 2, 3)$, seče pravu p i paralelna je ravni γ.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: II Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ________________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$M=\left\{\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x+y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \mid x,y\in \mathbf{R}\right\}$$

i operacija $*$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $*$ zatvorena u M. Da li je $(M,*)$ grupa? Da li je $(M,*)$ Abelova grupa?

2. Odrediti rang matrice K u zavisnosti od realnih parametara a i b:

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 11 & b-4 & 1 & 7 \\ 5 & 30 & 3b-10 & 3 & 23 \\ 2 & 1 & a-b-3 & 3 & ab-12 \end{bmatrix}$$

3. Date su prave $p: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+7}{12}$ i $q: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-10}{5}$ i tačka $S(1,-2,0)$.

a) Ispitati međusobni položaj pravih p i q. Ukoliko se seku odrediti njihovu presečnu tačku, u suprotnom odrediti rastojanje između njih.

b) Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačku S, koordinatni početak i paralelna je pravoj p, a zatim odrediti ortogonalnu projekciju prave p na ravan π.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: III Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{Q} \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x - y = 1 \right\}$$

i operacija $\star$ množenje matrica, ispitati da li je $(M, \star)$ grupa. Da li je $(M, \star)$ Abelova grupa?

2. Neka su dati vektori $\overrightarrow{a} = (8,1,1,0)$, $\overrightarrow{b} = (13,3,6,-1)$, $\overrightarrow{c} = (3,0,\lambda,2)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\overrightarrow{d} = (1,0,0,-1)$ u vektorskom prostoru $V = (\mathbf{R}^4, \mathbf{R}, +, \cdot)$.

a) Odrediti sve vrednosti realnog parametra λ za koje vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ i $\overrightarrow{d}$ čine bazu datog vektorskog prostora.

b) Za $\lambda = -1$ ispitati da li dati vektori čine bazu vektorskog prostora V. Ukoliko čine odrediti koordinate vektora $(-24,-7,-17,9)$ u toj bazi, u suprotnom predstaviti vektor $\overrightarrow{a}$ kao lineranu kombinaciju preostala tri vektora.

3. Date su prave $p : \begin{cases} x + 3y + z + 15 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$, $r : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ i ravan $\alpha : x + y + z - 7 = 0$.

a) Ispitati međusobni položaj prave r i ravni α. Ukoliko su paralelne odrediti pravu koja je simetrična pravoj r u odnosu na ravan α. U suprotnom, odrediti jednačinu prave koja je paralelna pravoj p i sadrži prodornu tačku prave r kroz α.

b) Odrediti jednačinu prave a koja sadrži tačku $A(1,-2,2)$, seče pravu p i paralelna je ravni α.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: IV Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ____

Z A D A C I :

1. Ako je

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p+q & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix} \mid p, q \in \mathbf{R} \ \wedge \ |p| \neq |q| \right\}$$

i operacija $\circ$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $\circ$ zatvorena u P. Da li je $(P, \circ)$ grupa? Da li je $(P, \circ)$ Abelova grupa?

2. Neka su date matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ i $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu

$$(MXP)^{-1} = P^{-1}(X^{-1} + P^{-1})$$

3. Date su prave $p : \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-12}{-1}$ i $q : \dfrac{x-3}{-7} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ i tačka $T(1, 2, 3)$.

a) Ispitati međusobni položaj pravih p i q. Ukoliko se seku odrediti njihovu presečnu tačku, u suprotnom odrediti rastojanje između njih.

b) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži tačku T, koordinatni početak i paralelna je pravoj q, a zatim odrediti ortogonalnu projekciju prave q na ravan α.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: V Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$$

i operacija $*$ množenje matrica, ispitati da li je $(C, *)$ grupa. Da li je $(C, *)$ Abelova grupa?

2. U zavisnosti od realnih parametara k i s diskutovati i rešiti sistem lineranih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcl} kx & - & y & + & 3z & = & 2 \\ (1-2k)x & + & 2y & - & z & = & s \\ -kx & & & + & z & = & k \end{array}$$

3. Neka su date prave $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{a}$, $a \in \mathbf{R}$, $q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ i ravan $\alpha : 3x - y + 6 = 0$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra a tako da se prave p i q seku, a zatim za tako određenu vrednost parametra a, odrediti jednačinu ravni koja sadrži date prave.

b) Ispitati međusobni položaj prave q i ravni α. Ukoliko su paralelne, odrediti ortogonalnu projekciju prave q na ravan α, u suprotnom odrediti jednačinu prave koja pripada ravni α i seče pravu q pod pravim uglom.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: VI Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$$

i operacija $\bullet$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $\bullet$ zatvorena u K. Da li je $(K, \bullet)$ grupa? Da li je $(K, \bullet)$ Abelova grupa?

2. Odrediti rang matrice S u zavisnosti od realnih parametara a i b:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -5 \\ -9 & -36 & 17 & a+15 & -22 \\ 5 & 16 & 1 & b-5 & ab+19 \end{bmatrix}$$

3. Date su prave $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-\lambda}{2}$ i $q : \dfrac{x-\lambda}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-6}{1}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i tačka $M(5, -4, -8)$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra λ za koji se prave p i q seku. Za tako određenu vrednost parametra λ odrediti jednačinu ravni π koja sadrži date prave.

b) Za $\lambda = 0$, odrediti koordinate tačke koja je simetrična tački M u odnosu na pravu p.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: VII

Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ______________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} k & m \\ 7m & k \end{bmatrix} \mid k, m \in \mathbf{Q} \right\}$$

i operacija $\bullet$ množenje matrica, ispitati da li je $(S, \bullet)$ grupa. Da li je $(S, \bullet)$ Abelova grupa?

2. Neka su dati vektori $\overrightarrow{e_1} = (-2, -2, -1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 3, \lambda, 1)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\overrightarrow{e_3} = (1, 1, -1, 0)$ i $\overrightarrow{e_4} = (1, 0, -2, 1)$ u vektorskom prostoru $V = (\mathbf{R}^4, \mathbf{R}, +, \cdot)$.

a) Odrediti sve vrednosti realnog parametra λ za koje dati vektori čine bazu vektorskog prostora V.

b) Za $\lambda = -1$ ispitati da li dati vektori čine bazu vektorskog prostora V. Ukoliko čine odrediti koordinate vektora $(-8, -7, 4, -2)$ u toj bazi, u suprotnom predstaviti vektor $\overrightarrow{e_1}$ kao lineranu kombinaciju preostala tri vektora.

3. Neka su date prave $a : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{m} = \dfrac{z+1}{2}$, $m \in \mathbf{R}$, $b : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-3}{2}$ i ravan $\pi : 2x + 3y + pz + 1 = 0$, $p \in \mathbf{R}$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra m tako da se prave a i b seku, a zatim za tako određenu vrednost parametra m, odrediti kanonski oblik jednačine prave koja seče date prave pod pravim uglom.

b) Odrediti vrednost realnog parametra p tako da prava b bude paralelna ravni π, a zatim za tako određenu vrednost parametra p odrediti ortogonalnu projekciju prave b na ravan π kao i rastojanje između njih.

M A T E M A T I K A 1

Grupa: VIII Datum: 28.11.2015.

Ime, prezime i broj indeksa: ____________________________________

Z A D A C I :

1. Ako je

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x-y & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbf{Q} \ \land \ |x| \neq |y| \right\}$$

i operacija $\star$ množenje matrica, ispitati da li je operacija $\star$ zatvorena u A. Da li je $(A, \star)$ grupa? Da li je $(A, \star)$ Abelova grupa?

2. Neka su date matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu

$$(AX)^{-1} - \frac{1}{5}C^{-1} = 2X^{-1}$$

3. Date su prave $a : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ i $b : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ i tačka $M(2, -10, 4)$.

a) Odrediti vrednost realnog parametra λ za koji se prave a i b seku. Za tako određenu vrednost parametra λ odrediti jednačinu ravni π koja sadrži date prave.

b) Odrediti koordinate tačke koja je simetrična tački M u odnosu na pravu a.