Решења задатака 1. групе јануарског испита из МАТЕМАТИКЕ 1

1. Нека је $G = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ и нека је операција $*$ дефинисана са

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6, \quad x, y \in G.$$

Испитати да ли је $(G, *)$ група. Да ли је $(G, *)$ Абелова група?

Решење:

За почетак, приметимо да важи

$$\begin{aligned} x * y &= xy - 2x - 2y + 6 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 \\ &= x(y-2) - 2(y-2) + 2 = (x-2)(y-2) + 2. \end{aligned}$$

1) затвореност: Ако су x и y произвољна два елемента из $G = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$, тада је и $x * y \in G$:

1° Важи $x * y \in \mathbb{Q}$ због затворености скупа $\mathbb{Q}$ у односу на операције множења и сабирања;

2° Важи $x * y \neq 2$. Ако претпоставимо супротно, тада важи:

$$x * y = 2 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(y-2) + 2 = 2 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(y-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \;\vee\; y = 2,$$

што је у контрадикцији са условом да су x и y елементи скупа G.

2) асоцијативност Приметимо да за произвољне $x, y, z \in G$ важи:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= ((x-2)(y-2) + 2) * z = (((x-2)(y-2) + 2) - 2)(z-2) + 2 \\ &= (x-2)(y-2)(z-2) + 2 = (x-2)((y-2)(z-2) + 2 - 2) + 2 \\ &= (x-2)(y * z - 2) + 2 = x * (y * z), \end{aligned}$$

одакле следи асоцијативност операције $*$ у скупу G. У последњем низу једнакости је прећутно коришћена асоцијативност сабирања и множења у скупи $\mathbb{Q}$.

3) комутативност: Ако су $x, y \in G$ произвољни, тада важи комутативност операције $*$ у скупу G:

$$x * y = (x-2)(y-2) + 2 = (y-2)(x-2) + 2 = y * x.$$

Коришћена је комутативност множења у скупу $\mathbb{Q}$.

4) неутрал: Испитујемо постојање елемента $e \in G$ таквог да за сваки елемент $x \in G$ важи $x * e = e * x = x$. Пошто смо утврдили комутативност, довољно је да важи $x * e = x$, односно:

$$(x-2)(e-2) + 2 = x \;\Leftrightarrow\; (x-2)(e-2) = x - 2,$$

одакле, због $x \neq 2$ следи да је $e - 2 = 1$, односно $e = 3$. То је очигледно елемент скупа $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$, па је $e = 3$ заиста тражени неутрал.

5) инверз: Нека је x произвољан елемент из G. Имајући комутативност у виду, испитујемо да ли постоји елемент $\overline{x} \in G$, такав да важи $x * \overline{x} = e$, односно

$$\begin{aligned}(x-2)(\overline{x}-2)+2=3 \;\Leftrightarrow\; & (x-2)(\overline{x}-2)=1 \quad (x \neq 2)\\ \Leftrightarrow\; & \overline{x}-2=\frac{1}{x-2}\\ \Leftrightarrow\; & \overline{x}=2+\frac{1}{x-2}=\frac{2x-3}{x-2}.\end{aligned}$$

Ако је x рационалан број, тада је и $\frac{2x-3}{x-2}$ такође рационалан број, јер је збир и производ као и количник два рационална броја (када је дефинисан) опет рационалан број. Коначно, важи

$$\overline{x} \neq 2 \;\Leftrightarrow\; 2+\frac{1}{x-2} \neq 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x-2} \neq 0,$$

што је испуњено за свако $x \in G$. Дакле, $\overline{x} = \frac{2x-3}{x-2}$ је заиста инверз елемента x.

Из свега наведног, закључујемо да је $(G, *)$ Абелова група. $\square$

2. Нека су дате тачке $A(1,-2,1)$ и $B(5,4,3)$, и раван $\beta : 3x + y - z + 3 = 0$.

а) Одредити једначину равни α у односу на коју су A и B међусобно симетричне тачке.

б) Одредити једначину праве p која садржи тачку A и паралелна је равнима α и β.

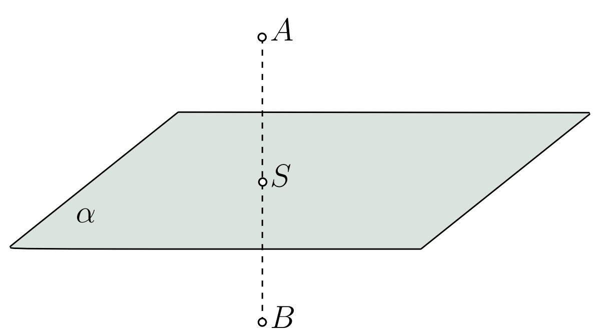
Решење:

а) Тражена раван α је ортогонална на праву одређену тачкама A и B, и садржи тачку S, средиште дужи $\overline{AB}$. Важи $\overrightarrow{AB} = (5,4,3) - (1,-2,1) = (4,6,2) = 2(2,3,1)$, те ћемо узети да је $\overrightarrow{n}_\alpha = (2,3,1)$ вектор нормале равни α. Даље, важи

$$S = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,-2,1)+(5,4,3)}{2} = (3,1,2),$$

па је једначина тражене равни:

$$\alpha : 2(x-3) + 3(y-1) + (z-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 3y + z - 11 = 0$$

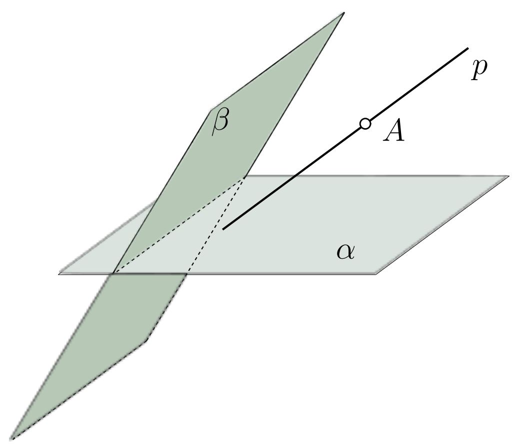


б) Равни α и β се секу јер $\overrightarrow{n}_\alpha$ и $\overrightarrow{n}_\beta$ нису пропорционални: Заиста, $\overrightarrow{n}_\alpha = \lambda\overrightarrow{n}_\beta$, односно $(2,3,1) = (3\lambda, \lambda, -\lambda)$ нема решења по λ у скупу $\mathbb{R}$. Права p је ортогонална на равни α и β, те стога важи:

$$\overrightarrow{v}_p = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4, 5, -7).$$

Пошто права p садржи тачку A, она је дата једначином:

$$p : \frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{-7}.$$



$\square$

3. а) Одредити Тејлоров полином трећег степена функције $f(x) = x\ln(x+3)$ у околини тачке $x = -2$.

б) Израчунати граничну вредност:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{x^2} - x\sin x) + \cos(1-\sqrt{1+x^2}) - 1}{x^4}.$$

Решење:

а) Одредимо прва три извода дате функције:

$$f'(x) = (x\ln(x+3))' = \ln(x+3) + \frac{x}{x+3},$$

$$f''(x) = \left(\ln(x+3) + \frac{x}{x+3}\right)' = \frac{1}{x+3} + \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{x+3+3}{(x+3)^2} = \frac{x+6}{(x+3)^2},$$

$$f''(x) = \left(\frac{x+6}{(x+3)^2}\right)' = \frac{(x+3)^2 - 2(x+3)(x+6)}{(x+3)^4} = \frac{x+3-2x-12}{(x+3)^3} = \frac{-x-9}{(x+3)^3}$$

Тражени Тејлоров полином је сада

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{f''(-2)}{2}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{6}(x+2)^3 \\ &= 0 - 2(x+2) + \frac{4}{2}(x+2)^2 - \frac{7}{6}(x+2)^3 = -2(x+2) + 2(x+2)^2 - \frac{7}{6}(x+2)^3. \end{aligned}$$

б) Користећи Маклоренове развоје са Пеановим остатком добијамо да важи

$$\begin{aligned}\ln(e^{x^2} - x\sin x) &= \ln(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - x(x - \frac{x^3}{6}) + o(x^4)) \\ &= \ln(1 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)) = \frac{2x^4}{3} + o(x^4), \quad x \to 0,\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}\cos(1 - \sqrt{1+x^2}) &= \cos\left(1 - \left(1 + x^2\right)^{1/2}\right) = \cos\left(1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)\right) \\ &= \cos\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^{x^2} - x\sin x) + \cos(1 - \sqrt{1+x^2}) - 1}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^4}{3} + 1 - \frac{x^4}{8} - 1 + o(x^4)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{13x^4}{24} + o(x^4)}{x^4} = \frac{13}{24}.\end{aligned}$$

$\square$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}.$$

Решење:

1) домен: Функција f је дефинисана за оне вредности x такве да је $x \geq 0$ и $x \neq 1$, односно $D_f = [0,1) \cup (1,+\infty)$.

2) нуле и знак: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Знак функције се може утврдити из наредне једноставне табеле:

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\sqrt{x}$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$-$
$f(x)$	$+$	$-$

Дакле, функција је позитивна на интервалу $(0,1)$ а негативна на интервалу $(1,+\infty)$.

3) парност: Домен функције није симетричан у односу на координатни почетак, па ова функција није ни парна ни непарна.

4) асимптоте: Важи

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{\sqrt{x}}{\cancelto{0^{\mp}}{1-x}} = \mp\infty,$$

па је $x = 1$ обострана вертикална асимптота функције f.

Даље, из

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \sqrt{x}} = 0,$$

следи да је $y = 0$ хоризонтална асимптота функције f.

5) монотоност: Први извод ове функције је:

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - \sqrt{x}(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+2x}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}(1-x)^2}.$$

Очигледно је да је $f'(x) > 0$ за свако $x \in D_f \setminus \{0\}$, одакле следи да је функција растућа на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Функција има локални минимум у $x = 0$.

6) конвексност: Рачунамо други извод функције f:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}(x-1)^2}\right)' = \frac{\sqrt{x}(x-1)^2 - (x+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 + \sqrt{x}\cdot 2(x-1)\right)}{2x(x-1)^4} \\ &= \frac{2x(x-1) - (x+1)(x-1+4x)}{4x\sqrt{x}(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - (x+1)(5x-1)}{4x\sqrt{x}(x-1)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 5x^2 + x - 5x + 1}{4x\sqrt{x}(x-1)^3} = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{4x\sqrt{x}(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Важи

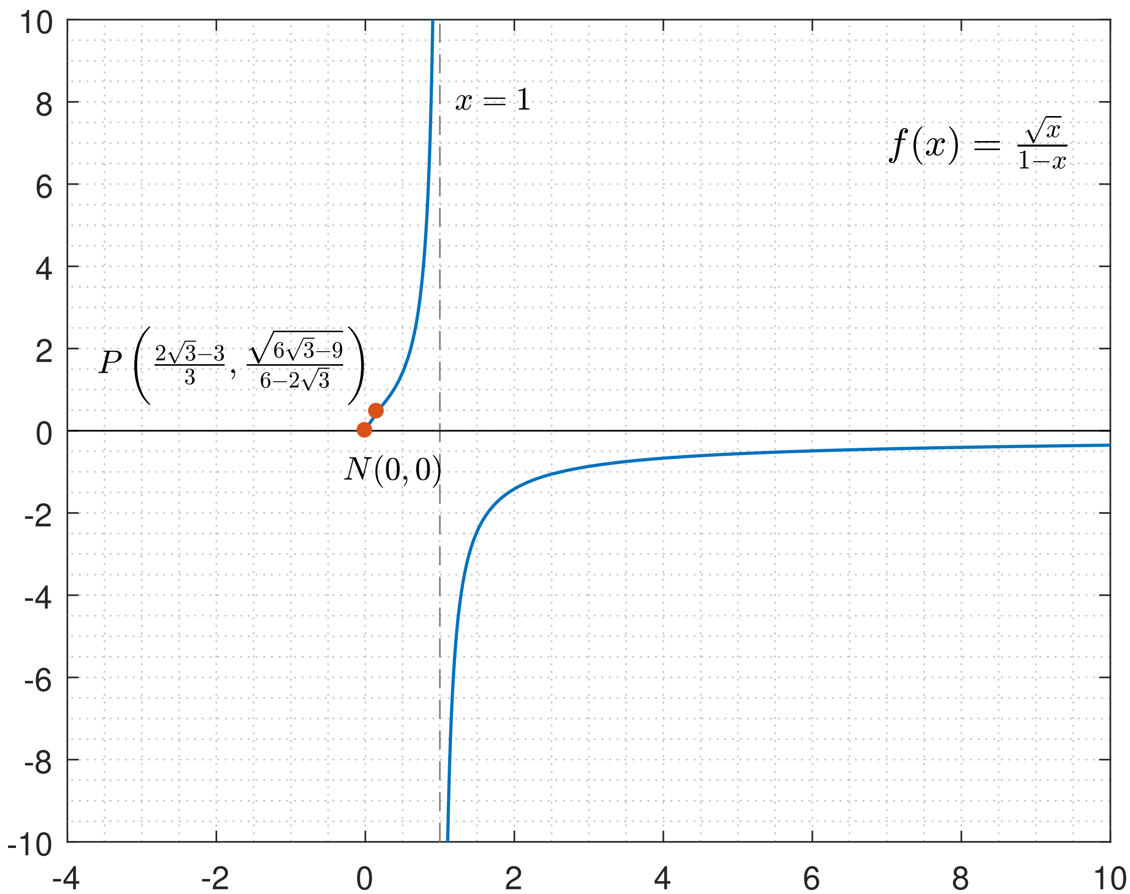
$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 + 6x - 1 = 0 \land x \in D_f \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

Формирајмо табелу којом ћемо испитати знак другог извода:

	$\left(0, (2\sqrt{3}-3)/3\right)$	$\left((2\sqrt{3}-3)/3, 1\right)$	$(1, +\infty)$
$-3x^2 - 6x + 1$	$+$	$-$	$-$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$+$
$x\sqrt{x}$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

Дакле, функција f је конвексна на интервалу $\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}, 1\right)$ а конкавна на интервалима $\left(0, \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)$ и $(1, +\infty)$. Превојна тачка је $P\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}, \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{6-2\sqrt{3}}\right)$.

7) график: На основу претходних тачака је могуће скицирати следећи график:



$\square$