Решења задатака 1. групе јунског испита из

МАТЕМАТИКЕ 1

1. У зависности од реалног параметра a дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & (2a-1)z & = & 3 \\ (a+2)x & & & - & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & 4z & = & 3a+2 \end{array}$$

Решење:

Задатак ћемо решавати уз помоћ Крамерове теореме. За почетак, потребно је израчунати детерминанте одговарајућих матрица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2a-1 \\ a+2 & 0 & -2 \\ a & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2a - 2(a+2)(2a-1) + 4(a+2) - 8$$
$$= 2a - 4a^2 - 6a + 4 + 4a + 8 - 8 = 4 - 4a^2 = -4(a-1)(a+1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2a-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3a+2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(3a+2) - 2(2a-1) + 4 - 12$$
$$= 6a + 4 - 4a + 2 - 8 = 2a - 2 = 2(a-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2a-1 \\ a+2 & 1 & -2 \\ a & 3a+2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 8 - 6a + (a+2)(3a+2)(2a-1) - a(2a-1) - 12(a+2) + 4(3a+2)$$
$$= 8 - 6a + (a+2)(6a^2 + a - 2) - 2a^2 + a - 12a - 24 + 12a + 8$$
$$= -2a^2 - 5a - 8 + 6a^3 + 13a^2 - 4 = 6a^3 + 11a^2 - 5a - 12$$
$$= (a-1)(6a^2 + 17a + 12),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a+2 & 0 & 1 \\ a & -2 & 3a+2 \end{vmatrix} = -a - 6(a+2) + (a+2)(3a+2) + 4$$
$$= -a - 6a - 12 + 3a^2 + 8a + 4 + 4 = 3a^2 + a - 4 = (a-1)(3a+4)$$

На основу ових вредности разликујемо следеће случајеве:

1. $a \notin \{-1, 1\}$: У овом случају је матрица система регуларна, односно систем има јединствено решење:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(-\frac{1}{2(a+1)}, -\frac{6a^2+17a+12}{4(a+1)}, -\frac{3a+4}{4(a+1)}\right).$$

2. $a = -1$: Матрица система је сингуларна и притом нпр. важи $\Delta_x \neq 0$, па на основу Крамерове теореме закључујемо да систем у овом случају нема решење.

3. $a = 1$: Пошто је у овом случају испуњено $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, знамо да систем или има бесконачно много решења или нема решења уопште. Заменом $a = 1$ у почетни систем, добијамо

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x & \boxed{-y} & +z & = & 3 & \\ 3x & & -2z & = & 1 & \\ x & -2y & +4z & = & 5 & \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x & -y & +z & = & 3 & \\ 3x & & \boxed{-2z} & = & 1 & \\ -3x & & +2z & = & -1 & \mathrm{III} + \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 2x & -y & +z & = & 3 \\ 3x & & -2z & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Закључујемо да постоји бесконачно много решења овог система која зависе од једног параметра. Пошто су нам промењиве y и z везане, узећемо да је $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и изразити y и z преко тог параметра. Коначно решење система за $a = 1$ је:

$$(x, y, z) = \left(\alpha, \frac{7\alpha - 7}{2}, \frac{3\alpha - 1}{2}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

□

2. Дате су праве $p : \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $q : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-2}$ и тачка $A(-4, -10, -1)$.

а) Испитати узајамни положај правих p и q. Одредити угао између њих ако се секу, односно растојање између њих у супротном.

б) Нека је α раван која је паралелна правама p и q, и садржи тачку A. Одредити једначину праве која је симетрична правој p у односу на раван α.

Решење:

Права p је одређена тачком $P(2,-2,1)$ и вектором правца $\overrightarrow{v}_p = (-2,1,2)$, а права q тачком $Q(-2,-1,1)$ и вектором $\overrightarrow{v}_q = (2,-1,-2)$.

а) Пошто је $\overrightarrow{v}_p = -\overrightarrow{v}_q$, то су праве p и q паралелне. Растојање између те две праве је:

$$d(p,q) = d(P,q) = \frac{|\overrightarrow{v}_q \times \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{v}_q|},$$

где је

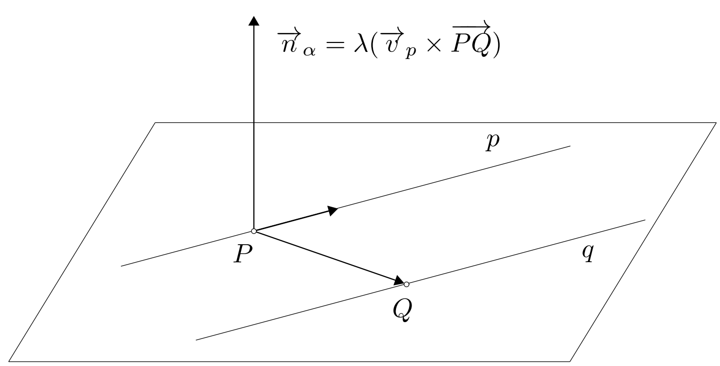
$$\overrightarrow{v}_q \times \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-2) \times (-4,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2,8,-2),$$

односно важи

$$d(p,q) = \frac{\sqrt{2^2+8^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = 2\sqrt{2}.$$

б) Вектор правца равни α је нормалан на вектор $\overrightarrow{v}_p$ (и $\overrightarrow{v}_q$) и вектор $\overrightarrow{PQ}$, те је пропорционалан вектору $\overrightarrow{v}_p \times \overrightarrow{PQ} = (-2,-8,2) = -2(1,4,-1)$, па можемо узети да је $\overrightarrow{n}_\alpha = (1,4,-1)$. Једначина равни α је:

$$\alpha: \ 1(x+4) + 4(y+10) - 1(z+1) = 0 \ \Leftrightarrow \ x + 4y - z + 43 = 0.$$



Нека је тачка P' симетрична тачки P у односу на раван α. Тада је тачка S, средиште дужи PP', пројекција тачке P на раван α. Пошто је $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{n}_\alpha$, то је $S = P + t\overrightarrow{n}_\alpha = (2+t, -2+4t, 1-t)$, где параметар $t \in \mathbb{R}$ добијамо из услова $S \in \alpha$:

$$2 + t + 4(-2+4t) - (1-t) + 43 = 0 \ \Leftrightarrow \ 18t + 36 = 0 \ \Leftrightarrow \ t = -2.$$

Дакле, пројекција тачке P на раван α је $S(0,-10,3)$ а њој симетрична тачка у односу на α је $P' = 2S - P = (-2,-18,5)$. Ако је p' тражена права, тада је она паралелна правој p, па важи $\overrightarrow{v}_{p'} = \overrightarrow{v}_p$, а како је $P' \in p'$, то је њена једначина:

$$p': \frac{x+2}{-2} = \frac{y+18}{1} = \frac{z-5}{2}.$$

$\square$

3. Нека је дат низ (a_n) чији је општи члан

$$a_n = 2n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

а) Испитати конвергенцију низа (a_n) и у случају да конвергира наћи његову граничну вредност.

б) Одредити све тачке нагомилавања низа (b_n), чији је општи члан

$$b_n = \left(\frac{1+2n^{(-1)^n}}{1+3n^{(-1)^n}}\right)\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{2^n+7^{n+1}}{2^{n+1}+5\cdot 7^n},\quad n \in \mathbb{N}.$$

Решење:

а) Приметимо да за општи члан датог низа важи

$$\begin{aligned} a_n &= 2n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right) = \ln\left(\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+n+1}\right)^{1/2}\right)^{2n} \\ &= \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+n+1}\right)^n = \ln\left(1+\frac{n}{n^2+n+1}\right)^n \\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{n^2+n+1}}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{\frac{n^2}{n^2+n+1}} \end{aligned}$$

Користећи чињеницу да су функције $x \mapsto \ln x$ и $x \mapsto e^x$ непрекидне, лако рачунамо граничну вредност низа (a_n):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{n^2+n+1}}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{\frac{n^2}{n^2+n+1}}\right) \\ &= \ln\left(e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}}\right) = \ln(e^1) = 1. \end{aligned}$$

б) Дефинишимо низове (c_n), (d_n) и (e_n) на следећи начин:

$$c_n = \left(\frac{1+2n^{(-1)^n}}{1+3n^{(-1)^n}}\right),\ d_n = \sin\frac{2n\pi}{3} \quad \text{и} \quad e_n = \frac{2^n+7^{n+1}}{2^{n+1}+5\cdot 7^n},$$

одакле је $b_n = c_n \cdot d_n + e_n$. Посматрајмо најпре низ (c_n) и, конкретније, његове поднизове парних и непарних чланова:

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+4k}{1+6k} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\cancelto{0}{\dfrac{2}{2k+1}}}{1+\cancelto{0}{\dfrac{3}{2k+1}}} = 1$$

Дакле, скуп тачака нагомилавања низа (c_n) је $T_{c_n} = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$.

За низ (d_n) важи

$$d_n = \begin{cases} 0, & n = 3k \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k+1 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3k+2 \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

односно скуп тачака нагомилавања овог низа је $T_{d_n} = \left\{0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.
Коначно, низ (e_n) је конвергентан:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{7^n}\left(\cancelto{0}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n} + 7\right)}{\cancel{7^n}\left(2\cancelto{0}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n} + 5\right)} = \frac{7}{5}.$$

Имајући у виду све досадашње закључке, скуп тачака нагомилавања се може одредити из следеће табеле:

n	$\lim_{n\to\infty} c_n$	$\lim_{n\to\infty} d_n$	$\lim_{n\to\infty} e_n$	$\lim_{n\to\infty} b_n$
$6k$	$2/3$	0	$7/5$	$7/5$
$6k+1$	1	$\sqrt{3}/2$	$7/5$	$\sqrt{3}/2+7/5$
$6k+2$	$2/3$	$-\sqrt{3}/2$	$7/5$	$-\sqrt{3}/3+7/5$
$6k+3$	1	0	$7/5$	$7/5$
$6k+4$	$2/3$	$\sqrt{3}/2$	$7/5$	$\sqrt{3}/3+7/5$
$6k+5$	1	$-\sqrt{3}/2$	$7/5$	$-\sqrt{3}/2+7/5$

Скуп тачака нагомилавања низа (b_n) је стога:

$$T_{b_n} = \left\{\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{5}, \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{5}\right\}$$

$\square$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x \ln x}.$$

Решење:

1) домен: Функција је дефинисана за вредности $x > 0$, $x \neq 1$, односно $D_f = (0,1) \cup (1, +\infty)$.

2) нуле и знак: Важи $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Знак функције се лако може одредити на основу следеће табеле:

	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$1 - \ln x$	$+$	$+$	$-$
$x \ln x$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Функција је негативна на интервалима $(0,1)$ и $(e,+\infty)$ а позитивна на интервалу $(1,e)$.

3) парност: Домен функције није симетричан у односу на координатни почетак, па ова функција није ни парна ни непарна.

4) асимптоте:

Најпре ћемо проверити да ли функција поседује вертикалне асимптоте, односно занима нас понашање функције у тачкама домена у околини тачака 0 и e:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancelto{0}{\frac{1}{\ln x}} - 1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{\cancelto{\pm\infty}{\frac{1}{\ln x}} - 1}{x} = \pm\infty.$$

Дакле, праве $x = 0$ и $x = 1$ су вертикалне асимптоте функције f. Испитајмо да понашање функције у њеном десном крају дефинисаности:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{1}{\ln x}} - 1}{x} = 0^-.$$

Закључујемо да је $y=0$ хоризонтална асимптота функције f. Самим тим, функција нема косу асимптоту.

5) монотоност: За први извод важи:

$$f'(x)=\left(\frac{1-\ln x}{x\ln x}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}x\ln x-(1-\ln x)\left(\ln x+x\frac{1}{x}\right)}{x^2\ln^2 x}=\frac{\ln^2 x-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}$$

на основу чега закључујемо да је $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2-\ln x-1=0 \ \wedge \ x\in D_f$. Увешћемо смену $t=\ln x$, и посматрати претходни услов као квадратну једначину по t. За њена решења важи $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, одакле добијамо да су нуле првог извода $x_1=e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ и $x_2=e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. На основу наредне табеле

	$\left(0,e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$	$\left(e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},1\right)$	$\left(1,e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$	$(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},+\infty)$
$\ln^2 x-\ln x-1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2\ln^2 x$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

закључујемо да функција расте на интервалима $\left(0,e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$ и $(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},+\infty)$ а опада на интервалима $\left(e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},1\right)$ и $\left(1,e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$. Одатле следи да функција има локални максимум у тачки $x_{\max}=e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, а локални минимум у $x_{\min}=e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

6) конвексност: Други извод функције f је:

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\left(\frac{\ln^2 x-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}\right)'\\
&=\frac{\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)x^2\ln^2 x-(\ln^2 x-\ln x-1)\left(2x\ln^2 x+x^2\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)}{x^4\ln^4 x}\\
&=\frac{2x\ln^3 x-x\ln^2 x-2x\ln^4 x-2x\ln^3 x+2x\ln^3 x+2x\ln^2 x+2x\ln^2 x+2x\ln x}{x^4\ln^4 x}\\
&=\frac{-2x\ln^4 x+2x\ln^3 x+3x\ln^2 x+2x\ln x}{x^4\ln^4 x}=\frac{-2\ln^3 x+2\ln^2 x+3\ln x+2}{x^3\ln^3 x}\\
&=\frac{-2\ln^3 x+4\ln^2 x-2\ln^2 x+4\ln x-\ln x+2}{x^3\ln^3 x}=\frac{(2-\ln x)(2\ln^2 x+2\ln x+1)}{x^3\ln^3 x}.
\end{aligned}$$

Пошто важи

$$2\ln^2 x+2\ln x+1=\ln^2 x+(\ln x+1)^2>0,\qquad x\in D_f,$$

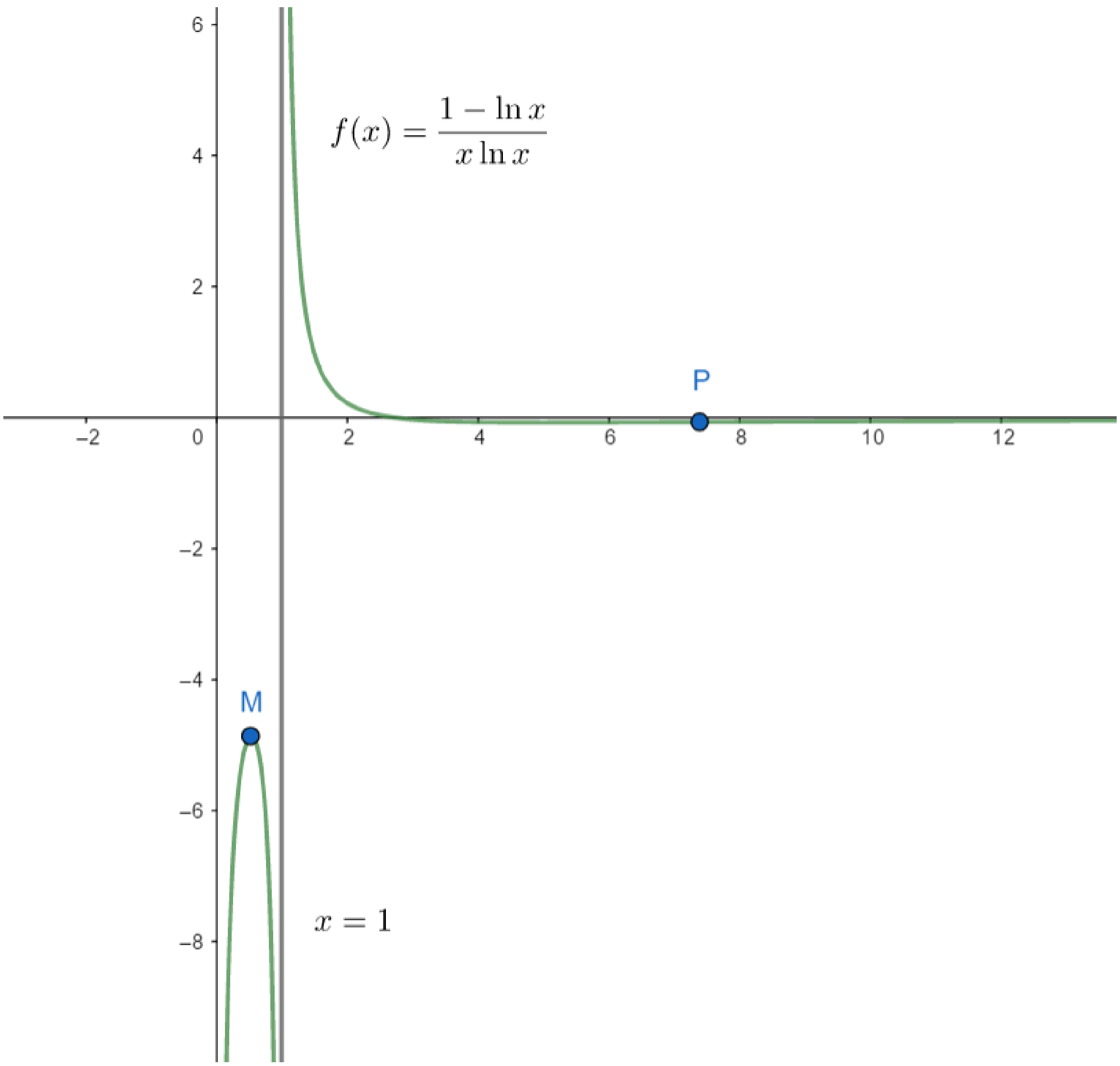
то је $f''(x)=0\Leftrightarrow \ln x=2 \ \wedge \ x\in D_f \Leftrightarrow x=e^2$. Из табеле

	$(0,1)$	$\left(1,e^2\right)$	$\left(e^2,+\infty\right)$
$2-\ln x$	$+$	$+$	$-$
$\ln^3 x$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{2\ln^2 x+2\ln x+1}{x^3}$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

следи да је функција конвексна на интервалу $\left(1,e^2\right)$ а конкавна на интервалима $(0,1)$ и $(e^2,+\infty)$. Функција има превојну тачку $P\left(e^2,-\dfrac{1}{2e^2}\right)$.

7) график: На основу претходних тачака је могуће скицирати график попут овог који је приложен на слици.

$\square$



Слика 0.1: График