Решења задатака 3. групе са другог колоквијума из МАТЕМАТИКЕ 1

1. [7п] Нека је дат низ (a_n) чији је општи члан

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{n^3-n}} + \sqrt{\frac{n}{n^3-n+1}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n^3+n+1}}, \ \ n \geq 2.$$

Испитати конвергенцију низа (a_n) и у случају да конвергира наћи његову граничну вредност.

Решење:
Приметимо да важи

$$n^3 - n \leq n^3 - n + k \leq n^3 + n + 1, \quad k = 0, 1, ..., 2n+1,$$

односно

$$\sqrt{\frac{n}{n^3-n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n^3-n+k}} \geq \sqrt{\frac{n}{n^3+n+1}}, \quad k = 0, 1, ..., 2n+1.$$

Сумирањем ових неједнакости за свако $k = 0, 1, ..., 2n+1$ добијамо да важи

$$\underbrace{(2n+2)\sqrt{\frac{n}{n^3-n}}}_{b_n} \geq \underbrace{\sum_{k=0}^{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n^3-n+k}}}_{a_n} \geq \underbrace{(2n+2)\sqrt{\frac{n}{n^3+n+1}}}_{c_n}.$$

Видимо да је испуњено

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n(n+1)^2}{n^3-n}} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\cancel{n^3}(1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}})^2}{\cancel{n^3}(1-\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}})}} = 2,$$

као и

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n(n+1)^2}{n^3+n+1}} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\cancel{n^3}(1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}})^2}{\cancel{n^3}(1+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}+\cancelto{0}{\frac{1}{n^3}})}} = 2,$$

па на основу Леме о два полицајца следи да је низ (a_n) конвергентан и важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

□

2. а) [2п] Одредити Тејлоров полином другог степена функције $f(x) = x\sqrt{x+1}$ у околини тачке $x_0 = 1$.

б) [6п] Одредити вредност реалног параметра A за коју је функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+x^2) + e^{-(3x^2/2+x)} - 1}{x^3}, & x \neq 0 \\[2ex] A(1-x^2), & x = 0 \end{cases}$$

непрекидна у тачки $x = 0$.

Решење:

а) Одредимо први и други извод дате функције:

$$f'(x) = \left(x\sqrt{x+1}\right)' = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{3\sqrt{x+1} - (3x+2)\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2(x+1)} = \frac{6(x+1)-(3x+2)}{4(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{3x+4}{4(x+1)^{3/2}}.$$

Тражени Тејлоров полином је сада

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = \sqrt{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}}(x-1) + \frac{7}{16\sqrt{2}}(x-1)^2.$$

б) Функција f ће бити непрекидна у тачки $x = 0$ уколико важи

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = A(1-0^2) = A. \tag{1}$$

Користећи Маклоренове развоје са Пеановим остатком добијамо да важи

$$\sin(x+x^2) = x + x^2 - \frac{(x+x^2)^3}{6} + o(x^3) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

као и

$$\begin{aligned} e^{-(3x^2/2+x)} &= 1 - \left(\frac{3x^2}{2} + x\right) + \frac{\left(\dfrac{3x^2}{2}+x\right)^2}{2} - \frac{\left(\dfrac{3x^2}{2}+x\right)^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{3x^2}{2} - x + \frac{2\cdot\dfrac{3x^2}{2}\cdot x + x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 - x - x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Дакле, имамо да је

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+x^2)+e^{-(3x^2/2+x)}-1}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x+x^2-\frac{x^3}{6}+o(x^3))+(1-x-x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3))-1}{x^3} \\
&= \frac{\frac{7x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \frac{7}{6}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Коначно, на основу (1) и (2) следи да је функција непрекидна у $x=0$ за $A=\dfrac{7}{6}$. $\square$

3. [10п] Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \ln^3 x - 9\ln x.$$

Решење:

1) домен: Домен функције f је исти као и домен функције $x \mapsto \ln x$, односно $D_f = (0,+\infty)$.

2) нуле и знак: $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x\cdot(\ln^2 x-9)=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee \ln x = 3 \vee \ln x = -3$, па су нуле функције $x_1 = e^{-3}$, $x_2 = 1$ и $x_3 = e^3$. На основу наредне табеле:

	$(0,e^{-3})$	$(e^{-3},1)$	$(1,e^3)$	$(e^3,+\infty)$
$\ln x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\ln x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\ln x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

закључујемо да је функција негативна на интервалима $(0,e^{-3})$ и $(1,e^3)$ а позитивна на интервалима $(e^{-3},1)$ и $(e^3,+\infty)$.

3) парност: Домен функције није симетричан у односу на координатни почетак, па ова функција није ни парна ни непарна.

4) асимптоте: Важи $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \overset{-\infty}{\ln x}\cdot \overset{+\infty}{(\ln^2 x-9)} = -\infty$, па је $x=0$ десна вертикална асимптота функције f.

Функција нема хоризонталну асимптоту пошто важи

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{\ln x}\cdot\overset{+\infty}{(\ln^2 x-9)} = +\infty.$$

Даље, вишеструком применом Лопиталовог правила имамо да важи

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln^3 x - 9\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}-\frac{9}{x}}{1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3(\ln^2 x-3)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}\\ &= 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

одакле закључујемо да функција нема ни косу асимптоту.

5) монотоност: Приметимо да смо приликом прве употребе Лопиталовог правила у (3) већ израчунали први извод функције f:

$$f'(x) = \frac{3(\ln^2 x - 3)}{x} = \frac{3(\ln x + \sqrt{3})(\ln x - \sqrt{3})}{x}.$$

Први извод је дефинисан на целом домену и важи

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = -\sqrt{3} \;\vee\; \ln x = \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; x = e^{-\sqrt{3}} \;\vee\; x = e^{\sqrt{3}}.$$

Из једноставне табеле

	$(0, e^{-\sqrt{3}})$	$(e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}})$	$(e^{\sqrt{3}}, +\infty)$
$\ln x + \sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$
$\ln x - \sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$
x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

се закључује да функција f расте на интервалима $(0, e^{-\sqrt{3}})$ и $(e^{\sqrt{3}}, +\infty)$, опада на интервалу $(e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}})$, има локални максимум за $x = e^{-\sqrt{3}}$ и локални минимум за $x = e^{\sqrt{3}}$. На графику ћемо означити тачке $A_{\max} = (e^{-\sqrt{3}}, 6\sqrt{3})$ и $B_{\min} = (e^{\sqrt{2}}, -6\sqrt{3})$.

6) конвексност: Рачунамо други извод функције f:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\frac{3(\ln^2 x - 3)}{x}\right)' = 3\cdot\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x - (\ln^2 x - 3)}{x^2}\\ &= -3\cdot\frac{\ln^2 x - 2\ln x - 3}{x^2} = \frac{3(\ln x + 1)(3 - \ln x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Други извод је такође дефинисан на читавом домену и важи

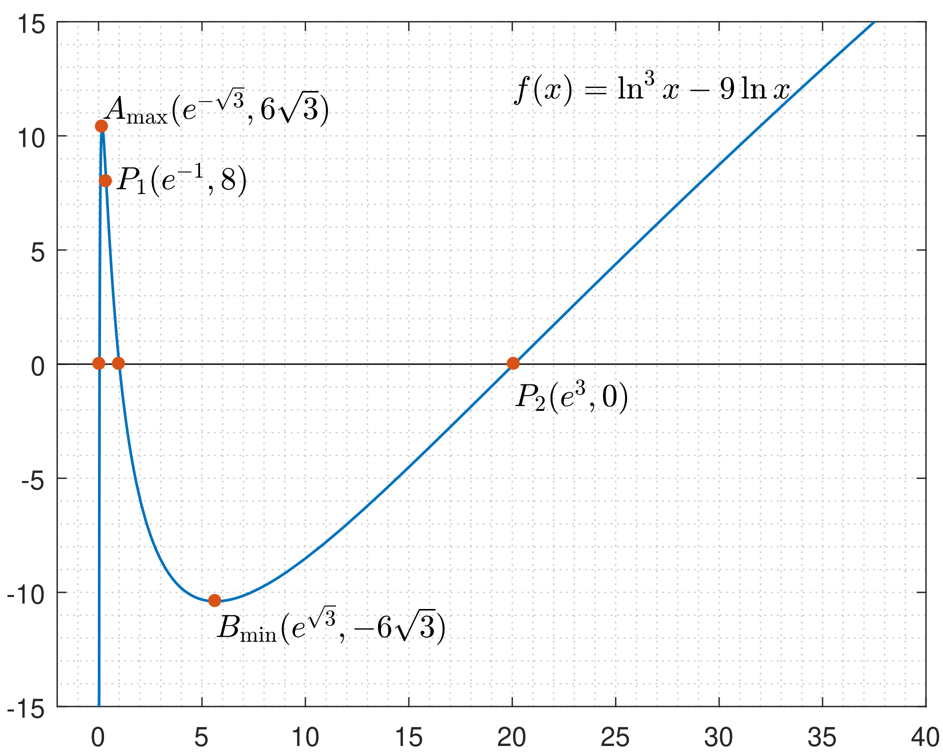
$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = -1 \;\vee\; \ln x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1} \;\vee\; x = e^{3}.$$

Као и раније, формираћемо табелу којом ћемо испитати знак другог извода:

	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, e^3)	$(e^3, +\infty)$
$\ln x + 1$	$-$	$+$	$+$
$3 - \ln x$	$+$	$+$	$-$
x^2	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$

Дакле, функција f је конкавна на интервалима $(0, e^{-1})$ и $(e^3, +\infty)$ а конвексна на интервалу (e^{-1}, e^3). Превојне тачке су $P_1(e^{-1}, 8)$ и $P_2(e^3, 0)$.

7) график: На основу претходних тачака је могуће скицирати следећи график:



$\square$