Решења задатака 3. групе фебруарског испита из

МАТЕМАТИКЕ 1

1. У зависности од реалних параметара a и b дискутовати и решити систем линеарних једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & u & = & 1 \\ -x & + & y & + & (a-2)z & + & 3u & = & a-1 \\ x & + & 3y & + & (b+2)z & + & au & = & b+1 \end{array}$$

Решење:

Задатак ћемо решавати уз помоћ теореме Кронекер-Капелија, уз уобичајене ознаке A и A_p за стандардну и проширену матрицу система. Користећи елементарне трансформације врста које чувају ранг, можемо свести проширену матрицу система на дијагонални облик:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -1 & 1 & a-2 & 3 & \vdots & a-1 \\ 1 & 3 & b+2 & a & \vdots & b+1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} + 1 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + (-1) \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & a-2 & 3 & a-1 \\ 1 & 3 & b+2 & a & b+1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} + 1 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + (-1) \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & a & 2 & \vdots & a \\ 0 & 2 & b & a+1 & \vdots & b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} + (-1) \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & a & 2 & \vdots & a \\ 0 & 0 & \boxed{b-a} & a-1 & \vdots & b-a \end{array}\right]$$

Сада разликујемо неколико случајева:

1. $b \neq a$: У овом случају је $r(A) = r(A_p) = 3$ и скуп решења система зависи од једног параметра. Ако је $u = \alpha \in \mathbb{R}$, тада заменом у систем добијамо да важи:

$$(x, y, z, u) = \left(-1 + \frac{-a^2 + a + 4b - 4}{2(b-a)}\alpha, \frac{a^2 + a - 2b}{2(b-a)}\alpha, 1 - \frac{a-1}{b-a}\alpha, \alpha\right)$$

2. $b = a$:

2.1. $a = 1$: Сада је $r(A) = r(A_p) = 2$, па систем има двопараметарски скуп решења. Ако је $u = \alpha$ и $z = \beta$, тада се решење система може записати у облику:

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{1 + 4\alpha - 3\beta}{2}, \frac{1 - 2\alpha - \beta}{2}, \beta, \alpha \right).$$

2.2. $a \neq 1$: Важи $r(A) = r(A_p) = 3$, па поново имамо ситуацију када скуп решења система зависи од једног параметра. Из последње једначине је $(a-1)u = 0$ одакле је $u = 0$. Ако означимо $z = \alpha$, тада за решење система важи:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2 - a + (a-4)\alpha}{2}, \frac{a - a\alpha}{2}, \alpha, 0 \right).$$

□

2. Нека су дате раван $\alpha : 2x + y + 3z + 5 = 0$, раван β одређена тачкама $A(0, -1, 1)$, $B(2, 3, 1)$ и $C(1, -5, -1)$, тачка $T(0, -4, 4)$ и права $p : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{3}$.

а) Испитати узајамни положај равни α и β. Одредити растојање између α и β ако су паралелне, односно угао између њих ако се секу.

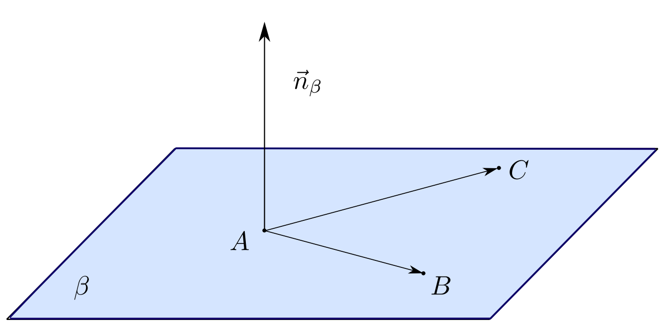
б) Одредити једначину праве q која садржи тачку T, паралелна је равни α и сече праву p.

Решење:

а) Раван β је одређена тачком A и вектором ортогоналним на векторе $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Пошто је:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-8, 4, -12) = -4(2, -1, 3),$$

можемо узети да је $\overrightarrow{n}_\beta = (2, -1, 3)$.



Дакле, једначина равни β је

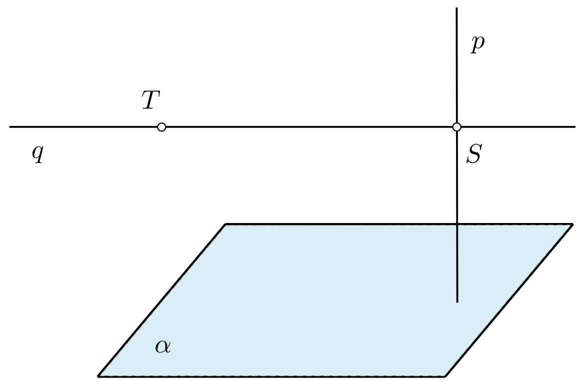
$$\beta : 2(x-0) - 1(y+1) + 3(z-1) = 0 \iff 2x - y + 3z - 4 = 0.$$

Пошто $\overrightarrow{n}_\alpha$ и $\overrightarrow{n}_\beta$ нису пропорционални, равни α и β се секу. Угао између те две равни је одређен са:

$$\cos\measuredangle(\alpha,\beta) = \frac{|\overrightarrow{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{n}_\beta|}{|\overrightarrow{n}_\alpha||\overrightarrow{n}_\beta|} = \frac{(2,1,3)\cdot(2,-1,3)}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{4+1+9}} = \frac{4-1+9}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7},$$

односно важи $\measuredangle(\alpha,\beta) = \arccos\frac{6}{7}$.

б) Нека је S пресечна тачка дате праве p и тражене праве q.



Како је испуњено $S \in p$, то је $S = (2t+3, t+1, 3t+5)$ за неко $t \in \mathbb{R}$. Ако важи $q \parallel \alpha$, тада је

$$\overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{n}_\alpha = 0 \iff (2t+3, t+5, 3t+1)\cdot(2,1,3) = 0 \iff 14t + 14 = 0,$$

одакле се добија $t = -1$, односно $S = (1,0,2)$ и $\overrightarrow{v}_q = \overrightarrow{TS} = (1,4,-2)$. Коначно, једначина тражене праве је

$$q : \frac{x}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-4}{-2}.$$

□

3. Нека је дат низ (a_n) чији је општи члан

$$a_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)},\ n \geq 2.$$

а) Испитати конвергенцију низа (a_n) и у случају да конвергира наћи његову граничну вредност.

б) Одредити све тачке нагомилавања низа (b_n), чији је општи члан

$$b_n = \sin n\pi \cdot a_n + \frac{2019 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{(-1)^{n+1} + 3^n} \cos \frac{2n\pi}{3}, \quad n \geq 2.$$

Решење:

а) Приметимо да за цео број $n \geq 0$ важи

$$2^{n+1} + 1 - (2^n + 1) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n.$$

На основу тога видимо да важи

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} \\ &= \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{9-5}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{2^{n+1}+1-(2^n+1)}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}+1}, \end{aligned}$$

одакле следи да је (a_n) конвергентан низ и важи:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

б) Јасно је да је $\sin n\pi = 0$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Дефинишимо низове (c_n) и (d_n) на следећи начин:

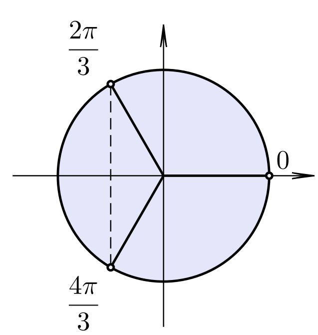
$$c_n = \frac{2019 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{(-1)^{n+1} + 3^n} \quad \text{и} \quad d_n = \cos \frac{2n\pi}{3},$$

одакле је $b_n = c_n \cdot d_n$. Низ (c_n) је конвергентан:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2019 \cdot 2^n + 3^{n+1}}{(-1)^{n+1} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\left(2019 \cdot \overset{\to 0}{\cancel{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n}} + 3\right)}{\cancel{3^n}\left((-1)^{n+1} \overset{\to 0}{\cancel{\tfrac{1}{3^n}}} + 1\right)} = 3,$$

а за низ (d_n) важи

$$d_n = \begin{cases} 1, & n = 3k \\ -\frac{1}{2}, & n = 3k+1 \\ -\frac{1}{2}, & n = 3k+2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$



Сада је очигледно да важи $\lim\limits_{h\to\infty} b_{3k} = 3$ и $\lim\limits_{h\to\infty} b_{3k+1} = \lim\limits_{h\to\infty} b_{3k+2} = -\frac{3}{2}$. Дакле, скуп тачака нагомилавања низа (b_n) је

$$T_{b_n} = \left\{3, -\frac{3}{2}\right\}$$

$\square$

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = x^2\sqrt{x+1}.$$

Решење:

1) домен: Функција је дефинисана кад важи $x+1 \geq 0$, односно $D_f = [-1, +\infty)$.

2) нуле и знак: Важи $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$. Функција је позитивна на интервалима $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$.

3) парност: Домен функције није симетричан у односу на координатни почетак, па ова функција није ни парна ни непарна.

4) асимптоте:

Функција је непрекидна на свом домену и дефинисана у левом крају, па нема верикалних асимптота. Пошто важи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x+1} = +\infty$, то фунција нема ни хоризонталну асимптоту, а из $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x+1} = +\infty$ следи да функција нема ни косу асимптоту.

5) монотоност: За први извод важи:

$$\begin{aligned} f'(x) = (x^2\sqrt{x+1})' &= 2x\sqrt{x+1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{4x(x+1) + x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}, \end{aligned}$$

па на основу тога закључујемо да је $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(5x+4) = 0 \wedge x \in D_f \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{4}{5}$. Такође, из наредне табеле

	$(-1, -4/5)$	$(-4/5, 0)$	$(0, +\infty)$
x	$-$	$-$	$+$
$5x+4$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{x+1}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

закључујемо да функција расте на интервалима $\left(-1,-\frac{4}{5}\right)$ и $(0,+\infty)$ а опада на интервалу $\left(-\frac{4}{5},0\right)$. Одатле следи да функција има локални минимум у тачкама $x=-1$ и $x=0$, а локални максимум у $x=-\frac{4}{5}$.

6) конвексност: Други извод функције f је:

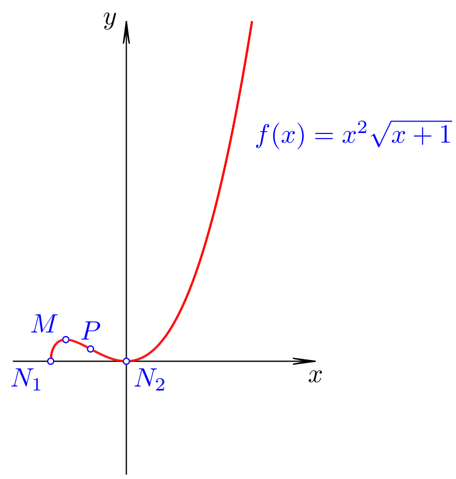
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{5x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{(10x+4)\sqrt{x+1}-(5x^2+4x)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2(x+1)} \\ &= \frac{(20x+8)(x+1)-(5x^2+4x)}{2(x+1)\cdot 2\sqrt{x+1}} = \frac{20x^2+28x+8-5x^2-4x}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{15x^2+24x+8}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

одакле је $f''(x)=0 \Leftrightarrow 15x^2+24x+8=0 \wedge x\in D_f \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{6}-12}{15}$. Из табеле

	$\left(-1,(2\sqrt{6}-12)/15\right)$	$\left((2\sqrt{6}-12)/15,+\infty\right)$
$15x^2+24x+8$	$-$	$+$
$(x+1)^{\frac{3}{2}}$	$+$	$+$
$x\sqrt{x}$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$

следи да је функција конкавна на интервалу $\left(-1,\frac{2\sqrt{6}-12}{15}\right)$ а конвексна на интервалу $\left(\frac{2\sqrt{6}-12}{15},+\infty\right)$. Функција има једну превојну тачку, $P\left(\frac{2\sqrt{6}-12}{15},\frac{(56-16\sqrt{6})\sqrt{2\sqrt{6}+3}}{75\sqrt{15}}\right)$.

7) график: На основу претходних тачака је могуће скицирати следећи график:


y
$f(x) = x^2\sqrt{x+1}$
M
P
N_1
N_2
x

□