Решења задатака 3. групе са првог колоквијума из МАТЕМАТИКЕ 1

1. Нека је $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq 0 \right\}$ и нека је $*$ множење матрица. Испитати да ли је $(G, *)$ група. Да ли је $(G, *)$ Абелова група?

Решење:

1) затвореност: Нека су $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ два произвољна елемента из скупа G. Тада је по дефиницији тог скупа $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ и $a \neq 0$, $c \neq 0$. Важи $A * B = \begin{bmatrix} ac & 0 & ad + bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ac \end{bmatrix}$, па пошто је $ac, ad + bc \in \mathbb{Q}$ због затворености скупа $\mathbb{Q}$ у односу на операције сабирања и множења, и $ac \neq 0$, то је скуп G затворен у односу на операцију $*$.

2) асоцијативност Пошто је множење квадратних матрица реда 3 у општем случају асоцијативна операција, асоцијативност множења ће важити и у скупу G.

3) комутативност: Ако су A и B произвољне матрице као у ставци 1), тада је

$$A * B = \begin{bmatrix} ac & 0 & ad + bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & 0 & cb + da \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ca \end{bmatrix} = B * A,$$

при чему је коришћена комутативност сабирања и множења у скупу $\mathbb{Q}$, те је испуњена комутативност операције $*$ у скупу G.

4) неутрал: Испитујемо постојање елемента $E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \end{bmatrix}$ таквог да за сваки елемент $A \in G$ важи $A * E = E * A = A$. Пошто смо утврдили комутативност, довољно је да важи $A * E = A$, односно:

$$\begin{bmatrix} ae_1 & 0 & ae_2 + be_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ae_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

одакле добијамо да важи $ae_1 = a$ и $ae_2 + be_1 = b$. Како важи $a \neq 0$, то је $e_1 = 1$, а одатле и $e_2 = 0$. Испуњено је $e_1, e_2 \in \mathbb{Q}$ и $e_1 \neq 0$, па је $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ тражени неутрал.

5) инверз: Нека је $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ произвољан елемент из G. Имајући комутативност у виду, испитујемо да ли постоји елемент $\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 & \overline{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{a} \end{bmatrix}$, такав да важи $A * \overline{A} = E$, односно

$$\begin{bmatrix} a\overline{a} & 0 & a\overline{b} + b\overline{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\overline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

па због $a \neq 0$ директно добијамо да је $\overline{a} = \frac{1}{a}$ и $a\overline{b} + \frac{b}{a} = 0$, одакле је $\overline{b} = -\frac{b}{a^2}$. Пошто је количник два рационална броја, кад је делилац различит од нуле, опет рационалан број, то су $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Q}$ и очигледно је $\overline{a} \neq 0$, те је

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & -b/a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

заиста инверз елемента A.

Из свега наведног, закључујемо да је $(G, *)$ Абелова група. □

2. Дате су тачке $A(1,0,1), B(2,\lambda,3), C(\lambda+4,3,1)$ и $D(5,1,5)$ у простору $\mathbb{R}^3$.

а) Одредити вредност реалног параметра λ тако да вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ буду линеарно зависни.

б) За вредност параметра $\lambda = 1$ израчунати запремину пирамиде $ABCD$ и дужину висине h_D из темена D у тој пирамиди.

Решење:

а) Вектори $\overrightarrow{AB} = (1,\lambda,2)$, $\overrightarrow{AC} = (\lambda+3,3,0)$ и $\overrightarrow{AD} = (4,1,4)$ ће бити линеарно зависни ако једначина

$$\alpha_1\overrightarrow{AB} + \alpha_2\overrightarrow{AC} + \alpha_3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}, \tag{1}$$

односно

$$(\alpha_1 + (\lambda+3)\alpha_2 + 4\alpha_3, \lambda\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$$

има неко нетривијално решење, што је еквивалентно са тим да хомоген систем

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & (\lambda+3)\alpha_2 & + & 4\alpha_3 & = 0 \\ \lambda\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 & & & + & 4\alpha_3 & = 0 \end{array}$$

има још неко решење сем $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0,0,0)$. То је сада еквивалентно са тим да је

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+3 & 4 \\ \lambda & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

одакле је $-4\lambda^2 - 10\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow -2(\lambda+1)(2\lambda+3) = 0$. Дакле, (1) ће бити испуњено ако и само ако важи $\lambda \in \{-1, -3/2\}$.

б) Ако је $\lambda = 1$, тада је

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -20,$$

одакле је тражена запремина

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{10}{3}.$$

За запремину пирамиде важи формула $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}h_D \cdot B$, где је

$$B = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(1,1,2) \times (4,3,0)| = \frac{1}{2}|(-6,8,-1)| = \frac{\sqrt{101}}{2}$$

површина основе ABC те пирамиде. Коначно, дужина висине из темена D је једнака $h_D = \dfrac{3V_{ABCD}}{B} = \dfrac{20}{\sqrt{101}}$.

$\square$

3. Нека су дате раван $\alpha : x - 2y + 2z - 3 = 0$, раван β одређена тачкама $A(1,-1,1)$, $B(-1,1,2)$ и $C(3,-2,2)$ и тачка $S(-1,2,-2)$.

а) Одредити једначину равни π која је ортогонална на равни α и β и садржи тачку S.

б) Одредити ортогоналну пројекцију праве $p : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z+3}{0}$ на раван π.

Решење:

Одредимо прво једначину равни β. За њен вектор нормале $\vec{n}_\beta$ важи да је ортогоналан на векторе $\overrightarrow{AB} = (-2,2,1)$ и $\overrightarrow{AC} = (2,-1,1)$, па можемо узети да је $\vec{n}_\beta = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3,4,-2)$. Пошто је нпр. $A \in \beta$, то је једначина те равни:

$$3(x-1) + 4(y+1) - 2(z-1) = 0,$$

односно

$$\beta : 3x + 4y - 2z + 3 = 0.$$

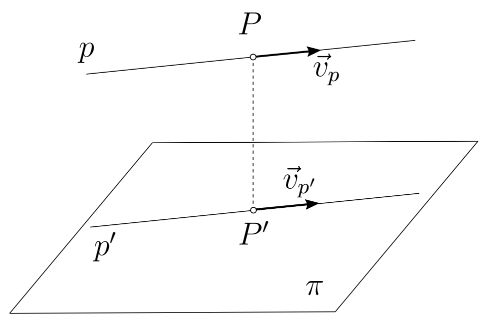
а) Раван π је ортогонална на равни α и β, па исто важи и за њихове векторе нормала, те је $\vec{n}_\pi = \lambda(\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta)$. Пошто је $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = (-4,8,10) = 2(-2,4,5)$, можемо узети да је $\vec{n}_\pi = (-2,4,5)$. Сада се једначина равни π добија користећи и услов $S \in \pi$:

$$\pi : -2(x+1) + 4(y-2) + 5(z+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x + 4y + 5z = 0.$$

б) Права p је одређена вектором правца $\vec{v}_p = (2,1,0)$ и тачком $P = (5,-5,-3)$. Приметимо да је

$$\vec{v}_p \cdot \vec{n}_\pi = (2,1,0) \cdot (-2,4,5) = -4 + 4 = 0,$$

одакле закључујемо да су права p и раван π паралелне. Стога ће тражена ортогонална пројекција праве p на раван π бити права p', која је паралелна са p, те за њу важи $\vec{v}_{p'} = \vec{v}_p$. Довољно је још одредити неку тачку P' са те праве, а ми ћемо узети да је P' пројекција тачке P на раван π.



Пошто је $\overrightarrow{PP'} \perp \pi$, то је $\overrightarrow{PP'} = \lambda\vec{n}_\pi$, одакле је $P' = P+\lambda\vec{n}_\pi = (5-2\lambda, -5+4\lambda, -3+5\lambda)$. Параметар λ одређујемо из услова $P' \in \pi$, односно:

$$-2(5-2\lambda) + 4(-5+4\lambda) + 5(-3+5\lambda) = 0,$$

одакле се једноставно добија да је $\lambda = 1$. Дакле, тражена тачка је $P'(3, -1, 2)$ а једначина праве p' је:

$$p' : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{0}$$

$\square$