Системи диференцијалних једначина

Хомогени системи линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима

Систем линеарних диференцијалних једначина је систем облика

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1' &=& a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n' &=& a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{array}\right\},$$

или краће

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot X + B(t),$$

где је

$$X = X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \text{ и } A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Уколико је $b_1(t) = ... = b_n(t) = 0$, онда кажемо да је систем хомоген. Ако је $a_{i,j}(t) = a_{ij} = const$, $i, j \in 1, ..., n$, онда тај систем називамо системом линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Нас ће у наставку управо интересовати хомогени системи линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима, односно системи облика

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1' &=& a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n' &=& a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A\cdot X.$$

Ако су позната линеарно независна решења система, $X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}, ..., X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$, тада је опште решење система дато са

$$X(t) = C_1 \cdot X_1(t) + \cdots + C_n \cdot X_n(t).$$

Преостаје да опишемо поступак налажења тих n линеарно независних решења $X_1(t), ..., X_n(t)$:

Нека су $\lambda_1, ..., \lambda_n$ решења карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0$. Свакој сопственој вредности одговара једно партикуларно решење, и то на следећи начин:

1. Уколико је λ_i једнострука реална сопствена вредност, тада је $X_i = M \cdot e^{\lambda_i}$, где је M један сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_i. Њега одређујемо из једначине $(A - \lambda_i I)M = O$.

2. Ако је $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ двострука реална сопствена вредност, тада је $X_i = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda_i t}$ и $X_{i+1} = (M_1 + M_2 t)e^{\lambda_i t}$, где су (M_1, M_2) нека решења система $\left.\begin{array}{c}(A - \lambda_i I)M_1 = M_2 \\ (A - \lambda_i I)M_2 = O\end{array}\right\}$. Напоменимо да је потребно одредити два независна решења система, по једно за X_i и X_{i+1}!

3. Ако је λ_i једнострука комплексна сопствена вредност, и $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$, тада је $X_{\text{kom}} = Me^{\lambda_i t}$, одакле су тражена два партикуларна решења дата са $X_i = \mathrm{Re}(X_{\text{kom}})$ и $X_i = \mathrm{Im}(X_{\text{kom}})$.

1. Решити систем
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& 2x &-& y &-& z\\ y' &=& 12x &-& 4y &-& 12z\\ z' &=& -4x &+& y &+& 5z \end{array}\right\}.$$

Решење. Из датог систeма следи да је

$$x'' = 2x' - y' - z' = 2(2x-y-z) - (12x-4y-12z) - (-4x+y+5z) = -4x+y+5z, \tag{16}$$

а одатле и

$$x''' = -4x' + y' + 5z' = -16x + 5y + 17z. \tag{17}$$

Из једнакости (16) и прве једначине система добијамо да важи

$$\left.\begin{array}{rcl} y + z &=& 2x - x'\\ y + 5z &=& 4x + x'' \end{array}\right\},$$

одакле се једноставно добија да је

$$y = -\frac{1}{4}\left(5x' + x'' - 6x\right), \quad z = \frac{1}{4}\left(x' + x'' + 2x\right). \tag{18}$$

Заменом овако одређених y и z у (17) добијамо линеарну једначину трећег реда са константним коефицијентима

$$x''' - 3x'' + 2x' = 0. \tag{19}$$

Из карактеристичне једначине која одговара тој диференцијалној једначини, $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, добијамо да је $\lambda \in \{0,1,2\}$, одакле закључујемо да је опште решење једначине (19) дато са

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Диференцирањем добијамо да је

$$x' = C_1 e^t + 2C_3 e^{2t},$$

односно

$$x'' = C_2 e^t + 4C_3 e^{2t},$$

па заменом у (18) једноставно добијамо да је

$$y = \frac{3}{2}C_1 - 2C_3 e^{2t}, \quad z = \frac{1}{2}C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

Дакле, решење система је дато са

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}\\ y(t) &=& \frac{3}{2}C_1 - 2C_3 e^{2t}\\ z(t) &=& \frac{1}{2}C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t} \end{array}\right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. начин: Урадићемо задатак и матричном методом, што ће нам убудуће бити први избор за решавање система. Ако је A матрица датог система, тада се из карактеристичне једначине $\det(A - \lambda I) = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1\\ 12 & -4-\lambda & -12\\ -4 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

добијају сопствене вреднсоти $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 2$. Анализирамо сваку сопствену вредност понаособ:

За $\lambda_1 = 0$, сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ одређујемо из једначине $(A - 0 \cdot I)M = O$, односно

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & b & - & c & = & 0 \\ 12a & - & 4b & - & 12c & = & 0 \\ -4a & + & b & + & 5c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење претходног система је $(a, b, c) = (2\alpha, 3\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а скуп свих сопствених вектора је дат са $M = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нама је за партикуларно решење довољно да изаберемо једног представника из скупа сопствених вектора, тако да за $\alpha = 1$ добијамо $X_1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0 \cdot t}$.

За $\lambda_2 = 1$, сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ одређујемо из једначине $(A - 1 \cdot I)M = O$, односно

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 12 & -5 & -12 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & - & c & = & 0 \\ 12a & - & 5b & - & 12c & = & 0 \\ -4a & + & b & + & 4c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење претходног система је $(a, b, c) = (\alpha, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а скуп свих сопствених вектора је дат са $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, одакле за $\alpha = 1$ добијамо $X_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1 \cdot t}$.

Коначно, за $\lambda_3 = 2$, сопствени вектор $M = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ одређујемо из једначине $(A - 2 \cdot I)M = O$, односно

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 12 & -6 & -12 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcrcrcl} & - & b & - & c & = & 0 \\ 12a & - & 6b & - & 12c & = & 0 \\ -4a & + & b & + & 3c & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Решење претходног система је $(a, b, c) = (\alpha, -2\alpha, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, а скуп свих сопствених вектора је дат са $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. За $\alpha = 1$ добијамо $X_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2 \cdot t}$.

На основу одређених партикуларних решења, можемо одредити опште решење. Важи

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t) = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t},$$

односно

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x(t) & = & 2C_1 & + & C_2 e^t & + & C_3 e^{2t} \\ y(t) & = & 3C_1 & & & - & 2C_3 e^{2t} \\ z(t) & = & C_1 & + & C_2 e^t & + & 2C_3 e^{2t} \end{array}\right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

2. Решити систем

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& 3x &-& y &+& z \\ y' &=& -x &+& 5y &-& z \\ z' &=& x &-& y &+& 3z \end{array}\right\}.$$

Решење. Нека је A матрица датог система. Тада је $\det(A-\lambda I)=0$ еквивалентно са

$$0=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3-11\lambda^2+36\lambda-36=p(\lambda).$$

Није тешко уочити да је $\lambda=2$ једна нула полинома $p(\lambda)$. Дељењем полинома $p(\lambda)$ полиномом $\lambda-2$ добијамо да важи $p(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda^2-9\lambda+18)=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)$. Дакле, сопствене вредности матрице A су $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ и $\lambda_3=6$. Као и у претходном задатку ћемо одредити сопствени вектор за сваку од сопствених вредности као нетривијално решење једначине

$$(A-\lambda_i I)M=O, \quad i=1,2,3. \tag{20}$$

За $\lambda_1=2$ се (20) своди на систем

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} a &-& b &+& c &=& 0 \\ -a &+& 2b &-& c &=& 0 \\ a &-& b &+& c &=& 0 \end{array}\right\},$$

чије је решење $(a,b,c)=(\alpha,0,-\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, одакле је $X_1(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}e^{2t}$.

Слично, за $\lambda_2=3$ и $\lambda_3=6$ добијамо системе

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} & & b &-& c &=& 0 \\ a &-& 2b &+& c &=& 0 \\ a &-& b & & &=& 0 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{rcrcrcl} 3a &+& b &-& c &=& 0 \\ a &+& b &+& c &=& 0 \\ a &-& b &-& 3c &=& 0 \end{array}\right\}$$

чија су решења (α,α,α), односно $(\alpha,-2\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Одатле добијамо независна партикуларна решења $X_2(t)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{3t}$ и $X_3(t)=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}e^{6t}$. Опште решење је сада

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x(t) &=& C_1e^{2t} &+& C_2e^{3t} &+& C_3e^{6t} \\ y(t) &=& & & C_2e^{3t} &-& 2C_3e^{6t} \\ z(t) &=& -C_1e^{2t} &+& C_2e^{3t} &+& C_3e^{6t} \end{array}\right\}, \quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

$\square$

3. Решити систем

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& -2x &-& 3y &+& 3z \\ y' &=& x &+& 2y &-& z \\ z' &=& -x &-& y &+& 2z \end{array}\right\}.$$

Решење. Нека је A матрица датог система. Тада је $\det(A-\lambda I)=0$ еквивалентно са

$$0=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -3 & 3\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ -1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2,$$

па имамо једну једностуку сопствену вредност $\lambda_1=0$ и једну двоструку сопствену вредност $\lambda_{2,3}=1$.

Као и у претходним задацима, за $\lambda_1=0$ једноставно одређујемо одговарајуће партикуларно решење $X_1(t)=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$.

За $\lambda_{2,3}=1$ имамо два независна партикуларна решења облика $(M_1+M_2t)e^t$, где $M_1=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}$ и $M_2=\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}$ добијамо из $(A-I)M_1=M_2$ и $(A-I)M_2=O$, односно

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl}-3a_1 & - & 3b_1 & + & 3c_1 & = & a_2\\ a_1 & + & b_1 & - & c_1 & = & b_2\\ -a_1 & - & b_1 & + & c_1 & = & c_2\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{rcrcrcl}-3a_2 & - & 3b_2 & + & 3c_2 & = & 0\\ a_2 & + & b_2 & - & c_2 & = & 0\\ -a_2 & - & b_2 & + & c_2 & = & 0\end{array}\right\},$$

одакле је $a_2=b_2=c_2=0$ и $c_1=a_1+b_1$, при чему су a_1 и b_1 произвољне вредности. Одабиром вредности за a_1 и b_1 добијамо X_2 и X_3: За $a_1=0$ и $b_1=1$ је

$$X_2(t)=\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}t\right)e^t=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e^t,$$

док је за $a_1=1$ и $b_1=0$

$$X_2(t)=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}t\right)e^t=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^t.$$

Опште решење је сада

$$\left.\begin{array}{rcc}x(t) & = & 3C_1+C_3e^t\\ y(t) & = & -C_1+C_2e^t\\ z(t) & = & C_1+(C_2+C_3)e^t\end{array}\right\},\quad C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

□

4. Решити систем

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}x' & = & x & - & y & + & z\\ y' & = & x & + & y & - & z\\ z' & = & & - & y & + & 2z\end{array}\right\}.$$

Решење. Карактеристични полином матрице датог система је $(2-\lambda)(\lambda-1)^2$. За $\lambda_1=2$ једноставно добијамо партикуларно решење $X_1(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{2t}$, док за $\lambda_{2,3}=1$ имамо систем

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} & - & b_1 & + & c_1 & = & a_2\\ a_1 & & & - & c_1 & = & b_2\\ & - & b_1 & + & c_1 & = & c_2\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{rcrcrcl} & - & b_2 & + & c_2 & = & 0\\ a_2 & & & - & c_2 & = & 0\\ & - & b_2 & + & c_2 & = & 0\end{array}\right\},$$

одакле је $a_2 = b_2 = c_2$, $a_1 = c_1 + c_2$ и $b_1 = c_1 - c_2$. За $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ добијамо решење $X_2(t)$, а за $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ добијамо $X_3(t)$, где је

$$X_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad X_3(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) e^t = \begin{bmatrix} 1+t \\ -1+t \\ t \end{bmatrix} e^t,$$

па је опште решење дато са

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3(1+t)e^t \\ y(t) &= \phantom{C_1e^{2t} +} C_2e^t + C_3(t-1)e^t \\ z(t) &= C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3e^t \end{aligned}\right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

5. Решити систем

$$\left.\begin{aligned} x' &= 4x - 3y \\ y' &= 3x + 4y \end{aligned}\right\}.$$

Решење. Ако је A матрица датог система, тада сопствене вредности налазимо као решење једначине $\det(A - \lambda I) = 0$, односно

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 + 9 = (\lambda - 4 - 3i)(\lambda - 4 + 3i).$$

Дакле, решења су $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Одредимо најпре X_{kom}:

$$(A - (4+3i)I)M = O \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} ia + b &= 0 \\ a - bi &= 0 \end{aligned}\right\},$$

одакле је $a = bi$, па је $M = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$. За $\alpha = 1$ имамо

$$\begin{aligned} X_{\text{kom}}(t) &= \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(4+3i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} \cdot e^{3it} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t) \\ &= \begin{bmatrix} i\cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t + i \sin 3t \end{bmatrix} e^{4t} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} e^{4t}}_{X_1(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{bmatrix} e^{4t}}_{X_2(t)}, \end{aligned}$$

одакле је опште решење $X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t)$, односно

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= -C_1e^{4t}\sin 3t + C_2e^{4t}\cos 3t \\ y(t) &= C_1e^{4t}\cos 3t + C_2e^{4t}\sin 3t \end{aligned}\right\}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

6. Решити систем

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= x + 2z \\ z' &= -2x + y - z \end{aligned}\right\}.$$

Решење. Сопствене вредности дате матрице система добијамо из $0 = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, одакле је $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = \pm i$. За $\lambda_1 = 1$ једноставно добијамо одговарајуће партикуларно решење $X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$. За $\lambda_{2,3} = \pm i$ најпре посматрамо систем $(A - iI)M = O$, односно

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} (2-i)a & - & b & + & 2c & = 0 \\ a & - & ib & + & 2c & = 0 \\ -2a & + & b & - & (1+i)c & = 0 \end{array}\right\},$$

чије је решење $(a, b, c) = (-(1+i)\alpha, -(1+i)\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. За $\alpha = -1$ добијамо комплексно партикуларно решење

$$X_{\text{kom}} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Ако је $X_2 = \mathrm{Re}(X_{\text{kom}})$ и $X_3 = \mathrm{Im}(X_{\text{kom}})$, онда је опште решење датог система $X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$, односно

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t \\ y(t) = 2C_1e^t + (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t \\ z(t) = C_1e^t - C_2\cos t - C_3\sin t \end{array}\right\}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$\square$