# Асимптотска ознака „мало о”

Ако важи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно мала у околини тачке $x = a$.

Ако важи $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно мала у околини тачке $x = a$.

Ако важи $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно велика у околини тачке $x = a$.

Ако важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно мала у околини тачке $x = a$.

Ако важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно велика у околини тачке $x = a$.

Ако су функције $f$ и $g$ нпр. бесконачно мале у околини тачке $x = a$ и важи $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, тада кажемо да је $f$ бесконачно мала функција вишег реда у односу на функцију $g$ у околини тачке $x = a$, и пишемо $f(x) = o(g(x)),\ \ x \to a$.

Ако важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно мала у околини тачке $x = a$.

Ако важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, тада кажемо да је функција $f$ бесконачно велика у околини тачке $x = a$.

Ако су функције $f$ и $g$ нпр. бесконачно мале у околини тачке $x = a$ и важи $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, тада кажемо да је $f$ бесконачно мала функција вишег реда у односу на функцију $g$ у околини тачке $x = a$, и пишемо $f(x) = o(g(x)),\ \ x \to a$.

Ознака $o$ се назива **асимптотском ознаком „мало о”**.

**Примери:** Важи

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0,$$

**Примери:** Важи

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

одакле је

$$x^2 = o(x), \quad x \to 0.$$

**Примери:** Важи

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

одакле је

$$x^2 = o(x), \quad x \to 0.$$

Слично,

$$x^3 = o(x), \quad x \to 0,$$
$$x \sin x = o(x), \quad x \to 0,$$

**Примери:** Важи

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0,$$

одакле је

$$x^2=o(x),\quad x\to 0.$$

Слично,

$$x^3=o(x),\quad x\to 0,$$
$$x\sin x=o(x),\quad x\to 0,$$

као и

$$x^4=o(x^2),\quad x\to 0,$$
$$x^4=o(x^3),\quad x\to 0.$$

**Примери:** Важи

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

одакле је

$$x^2 = o(x), \quad x \to 0.$$

Слично,

$$x^3 = o(x), \quad x \to 0,$$
$$x \sin x = o(x), \quad x \to 0,$$

као и

$$x^4 = o(x^2), \quad x \to 0,$$
$$x^4 = o(x^3), \quad x \to 0.$$

Закључак? Шта се може рећи о $x^2 \pm x^3$ или $o(o(x))$?

# Асимптотска ознака „мало о” - неке особине

Нека су $f$ и $g$ бесконачно мале функције кад $x \to a$. Тада је

Нека су $f$ и $g$ бесконачно мале функције кад $x \to a$. Тада је

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$;

# Асимптотска ознака „мало о” - неке особине

Нека су $f$ и $g$ бесконачно мале функције кад $x \to a$. Тада је

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$;
- $c \cdot o(f) = o(c \cdot f) = o(f), \ c \neq 0$;

Нека су $f$ и $g$ бесконачно мале функције кад $x \to a$. Тада је

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$;
- $c \cdot o(f) = o(c \cdot f) = o(f),\ c \neq 0$;
- $o(o(f)) = o(f)$;

Нека су $f$ и $g$ бесконачно мале функције кад $x \to a$. Тада је

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$;
- $c \cdot o(f) = o(c \cdot f) = o(f), \ c \neq 0$;
- $o(o(f)) = o(f)$;
- $o(f + o(f)) = o(f)$;

Нека су $f$ и $g$ бесконачно мале функције кад $x \to a$. Тада je

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$;
- $c \cdot o(f) = o(c \cdot f) = o(f),\ c \neq 0$;
- $o(o(f)) = o(f)$;
- $o(f + o(f)) = o(f)$;
- $(o(f))^n = o(f^n)$.

## Тејлоров полином

Ако је функција $f$ диференцијабилна $n+1$ пута у некој околини тачке $x = a$, тада у тој околини важи једнакост

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

## Тејлоров полином

Ако је функција $f$ диференцијабилна $n+1$ пута у некој околини тачке $x=a$, тада у тој околини важи једнакост

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

где је $T_n(x)$ **Тејлоров** полином $n$-тог степена функције $f$ у околини тачке $x=a$, а $R_n(x)$ његов остатак (грешка).

Ако је функција $f$ диференцијабилна $n+1$ пута у некој околини тачке $x=a$, тада у тој околини важи једнакост

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

где је $T_n(x)$ **Тејлоров** полином $n$-тог степена функције $f$ у околини тачке $x=a$, а $R_n(x)$ његов остатак (грешка). Важи

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

и

$$R_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Лагранжов облик}}$$

Ако је функција $f$ диференцијабилна $n+1$ пута у некој околини тачке $x=a$, тада у тој околини важи једнакост

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

где је $T_n(x)$ **Тејлоров** полином $n$-тог степена функције $f$ у околини тачке $x=a$, а $R_n(x)$ његов остатак (грешка). Важи

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

и

$$R_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Лагранжов облик}} = \underbrace{o((x-a)^n),\ \ x \to a}_{\text{Пеанов облик}}.$$

Ако је функција $f$ диференцијабилна $n+1$ пута у некој околини тачке $x=a$, тада у тој околини важи једнакост

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

где је $T_n(x)$ **Тејлоров** полином $n$-тог степена функције $f$ у околини тачке $x=a$, а $R_n(x)$ његов остатак (грешка). Важи

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

и

$$R_n(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Лагранжов облик}} = \underbrace{o((x-a)^n), \ \ x \to a}_{\text{Пеанов облик}}.$$

где је $c$ нека тачка између $x$ и $a$.

Маклоренов полином је специјалан случај Тејлоровог полинома је за $a = 0$.

Маклоренов полином је специјалан случај Тејлоровог полинома је за $a = 0$. Функције чији Маклоренов полином се може користити без извођења су:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0;$

Маклоренов полином је специјалан случај Тејлоровог полинома је за $a = 0$. Функције чији Маклоренов полином се може користити без извођења су:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0;$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0;$

Маклоренов полином је специјалан случај Тејлоровог полинома је за $a = 0$. Функције чији Маклоренов полином се може користити без извођења су:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0;$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0;$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0;$

Маклоренов полином је специјалан случај Тејлоровог полинома је за $a = 0$. Функције чији Маклоренов полином се може користити без извођења су:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0;$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0;$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0;$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0;$

Маклоренов полином је специјалан случај Тејлоровог полинома је за $a = 0$. Функције чији Маклоренов полином се може користити без извођења су:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0;$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0;$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0;$
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0;$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$

График функције $y = e^x$ и $y = 1 + x$:

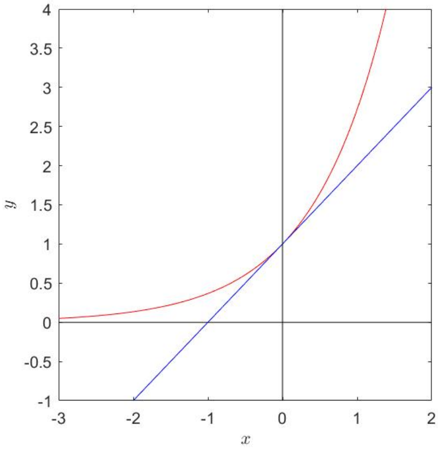
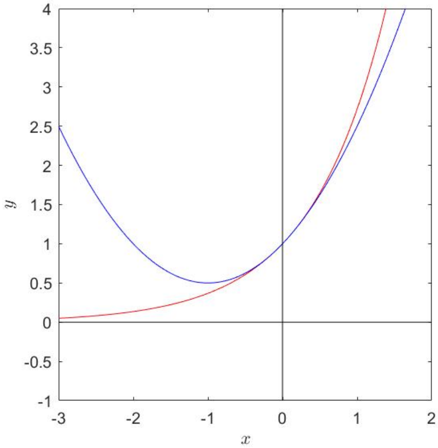


График функције $y = e^x$ и $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$:



# Маклоренов полином степена 3 за експоненцијалну функцију

График функције $y = e^x$ и $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$:

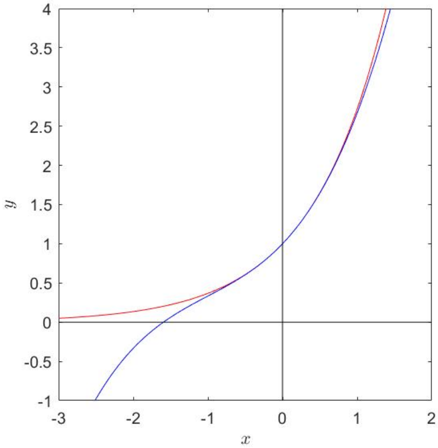
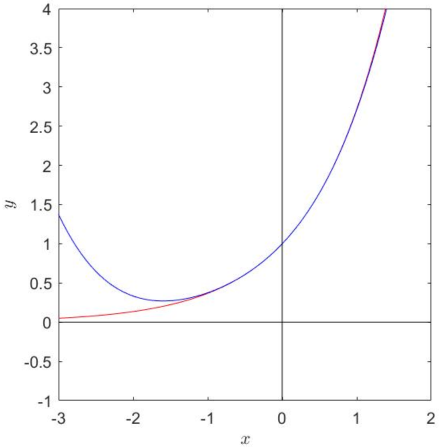


График функције $y = e^x$ и $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$:



Права $y = ax + b$ је (десна) асимптота криве $y = f(x)$ ако је

$$f(x) = ax + b + o(1), \quad x \to +\infty.$$

За $a \neq 0$ кажемо да је то коса асимптота, а за $a = 0$ да је хоризонтална асимптота.

Права $y = ax + b$ је (десна) асимптота криве $y = f(x)$ ако је

$$f(x) = ax + b + o(1), \;\; x \to +\infty.$$

За $a \neq 0$ кажемо да је то коса асимптота, а за $a = 0$ да је хоризонтална асимптота.

Уз помоћ знања Маклоренових развоја, некад можемо добити комплетнију слику о понашању функције у бесконачности.

Права $y = ax + b$ је (десна) асимптота криве $y = f(x)$ ако је

$$f(x) = ax + b + o(1), \ \ x \to +\infty.$$

За $a \neq 0$ кажемо да је то коса асимптота, а за $a = 0$ да је хоризонтална асимптота.

Уз помоћ знања Маклоренових развоја, некад можемо добити комплетнију слику о понашању функције у бесконачности.
**Пример:** Ако је $f(x) = xe^{1/x^2}$, тада је

$$f(x) = x\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + o(1), \ \ x \to \infty,$$

па закључуемо да је $y = x$ коса асимптота криве $y = f(x)$.

Међутим, важи и мало више:

Међутим, важи и мало више:

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \;\; x \to \infty,$$

Међутим, важи и мало више:

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \ \ x \to \infty,$$

па закључуемо да се график функције $y = f(x)$ „лепи” одозго кад $x \to +\infty$ а одоздо кад $x \to -\infty$.

# Коса асимптота графика функције