МАТЕМАТИКА 1

Писмени испит, фебруар 2009 - Група 1

1. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ -x & & & + & z & + & w & = & -3 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & + & (a+1)w & = & 9. \end{array}$$

у зависности од реалног параметра a.

Решење: Применом еквивалентних трансформација дати систем се своди на степенасти облик

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ & & y & + & 2z & + & 2w & = & -1 \\ & & & & & & (a-1)w & = & 0. \end{array}$$

1. За $a = 1$ систем има двопараметарски скуп решења (ранг матрице система је 2)

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta} = \{(\alpha+\beta+3, -2\alpha-2\beta-1, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2. За $a \neq 1$ систем има једнопараметарски скуп решења (ранг матрице система је 3)

$$\mathcal{R}_{\gamma} = \{(\gamma+3, -2\gamma-1, \gamma, 0) \mid \gamma \in R\}.$$

2. Дате су једначине равни α и β:

$$\alpha\colon x + 2y + z + 4 = 0 \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x + 3y - z + 3 = 0.$$

а) Одредити њихове векторе нормала $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

б) Одредити произвољне тачке $A \in \alpha$ и $B \in \beta$.

в) Испитати узајамни положај равни α и β.

г) Израчунати величину угла између вектора $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$.

д) Уколико се равни α и β секу одредити једначину њихове пресечне праве p у канонском облику, а ако се не секу одредити растојање равни α и β.

Решење:

а) Из једначина датих равни имамо $\vec{n}_\alpha = (1, 2, 1)$ и $\vec{n}_\beta = (2, 2, -1)$.

б) На пример, $A(0, 0, -4)$ и $B(0, 0, 3)$.

в) Како вектори $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ нису колинеарни, то је $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

г) Како је

$$\cos\angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{6},$$

то је $\angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \arccos\dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

д) Решавањем система

$$x + 2y + z + 4 = 0, \quad 2x + 3y - z + 3 = 0,$$

добијамо $x = 6 + 5t$, $y = -5 - 3t$, $z = t$ $(t \in \mathbb{R})$, што значи да је једначина пресечне праве

$$\frac{x-6}{5} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z}{1}.$$

3. а) Одредити Маклоренове полиноме другог степена функција

$$g_1(t) = \sqrt[5]{1+t}, \qquad g_2(x) = \cos 3x \qquad \text{и} \qquad g_3(x) = \sqrt[5]{\cos 3x}.$$

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{\cos 3x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{x^2}.$$

Решење: **а)** На основу познатих Маклоренових развоја за $(1+x)^a$ и $\cos x$ имамо

$$g_1(t) = (1+t)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}t + \binom{1/5}{2}t^2 + o(t^2),$$

$$g_2(x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$g_3(x) = (\cos 3x)^{1/5} = \left(1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)^{1/5} = 1 - \frac{9}{10}x^2 + o(x^2),$$

$$g_4(x) = (\cos 5x)^{1/3} = \left(1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^2)\right)^{1/3} = 1 - \frac{25}{6}x^2 + o(x^2),$$

па су тражени Маклоренови полиноми P (за g_1), Q (за g_2) и R (за g_3) дати са

$$P(t) = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}t^2, \quad Q(x) = 1 - \frac{9}{2}x^2, \quad R(x) = 1 - \frac{9}{10}x^2.$$

б) Користећи развоје из **а)** имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(\cos 3x)^{1/5} - (\cos 5x)^{1/3}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{9}{10}x^2 - \left(1 - \frac{25}{6}x^2\right) + o(x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{49}{15}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{49}{15} + o(1)\right) \\
&= \frac{49}{15}.
\end{aligned}$$

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{2-x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решење: (1) Из $D_f = \mathbb{R}$ и

$$f(x) \to \begin{cases} -\infty, & x \to -\infty \\ -\infty, & x \to +\infty \end{cases}$$

следи да функција нема ни вертикалних ни хоризонталних асимптота. Из

$$f(x) = \frac{2-x^2}{|x|}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{x^2}{|x|} + o\,(1)\,, \quad x \to \infty$$

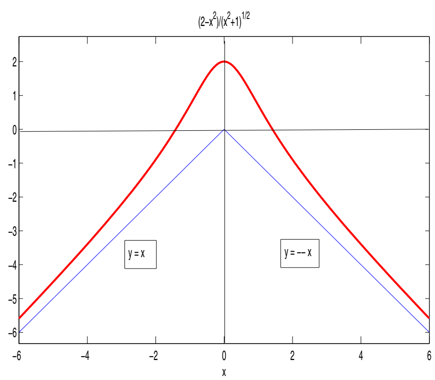
следи да је $y = x$ коса асимптота за $x \to -\infty$, а $y = -x$ коса асимптота за $x \to +\infty$.

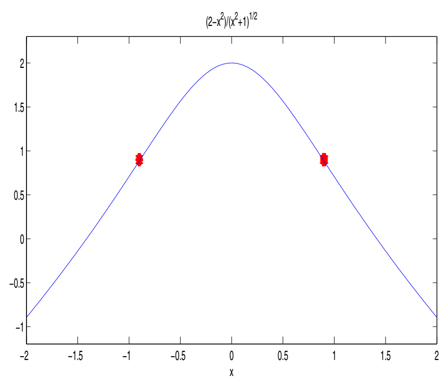
Нуле функције су $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$, функција је негативна на интервалима $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ и позитивна на (x_1, x_2).

(2) Из $f'(x) = -\dfrac{x(x^2+4)}{(x^2+1)^{3/2}}$ следи да је функција опадајућа на интервалу $(0,+\infty)$ и растућа на интервалу $(-\infty,0)$, што значи да у тачки $x_3 = 0$ има локални максимум који је једнак 2.

(3) Из $f''(x) = \dfrac{5x^2-4}{(x^2+1)^{5/2}}$ следи да је функција конвексна на интервалима $(-\infty,x_4)$ и $(x_5,+\infty)$, а конкавна на интервалу (x_4,x_5), где је $x_4 = -2/\sqrt{5}$ и $x_5 = 2/\sqrt{5}$. График функције има превојне тачке $P\left(x_4, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $Q\left(x_5, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

На основу података из (1)-(3) лако је скицирати график функције f (слика лево). Пошто превојне тачке нису уочљиве, оне су означене на зумираном делу (слика десно).





Напомена: Како је функција парна, довољно је било (а можда и једноставније) анализирату функцију на скупу $[0,+\infty)$, а затим узети одговарајуће податке за скуп $(-\infty,0]$ симетрично у односу на y осу (односно график пресликати осном симетријом у односу на y осу).

Драган Ђорић