МАТЕМАТИКА 1

Писмени испит, фебруар 2009 - Група 3

1. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & 1 \\ 2x & + & y & + & (c-4)z & = & 1 \\ -3x & - & (8+c)y & + & 2z & = & 2-c \end{array} .$$

у зависности од реалног параметра c.

Решење: Систем може да се реши Крамеровим правилом. Израчунавањем одговарајућих детерминанти добијамо

$$D = c^2 - 5c - 6 = (c+1)(c-6), \quad D_x = -2(c-5)(c-6), \quad D_y = (c-3)(c-6), \quad D_z = 4(c-6).$$

1. За $c \notin \{-1, 6\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-2\frac{c-5}{c+1}, \frac{c-3}{c+1}, \frac{4}{c+1}\right).$$

2. За $c = -1$ је $D_z \neq 0$, па систем није сагласан.

3. За $c = 6$ систем је еквивалентан систему

$$x + 3y = 1, \quad 5y - 2z = 1$$

који има једнопараметарски скуп решења

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{\left(\frac{2}{5}(1-3\alpha), \frac{1}{5}(1+2\alpha), \alpha\right) \mid \alpha \in R\right\}.$$

Напомена. Систем може еквивалентним трансформацијама да се сведе на степенасти облик

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & 1 \\ & - & 5y & + & (c-4)z & = & -1 \\ & & & & (6+5c-c^2)z & = & 24-4c \end{array}$$

па онда Гаусов алгоритам (уз одговарајућу дискусију) или опет Крамерово правило.

2. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon 2x + 2y + z + 9 = 0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

г) Израчунати величину угла између вектора $\vec{v}_a$ и $\vec{n}_\beta$.

д) Уколико се права a и раван β секу одредити величину угла φ између праве a и равни β, као и пресечну тачку M, а уколико се не секу одредити растојање између праве a и равни β.

Решење:

а) Из једначине дате равни је $\vec{n}_\beta = (2,2,1)$, док је

$$\vec{v}_a = (1,1,-1)\times(-1,-2,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -j-k,$$

односно $\vec{v}_a = (0,1,1)$.

б) На пример, $A(2,-2,0-)$ и $B(0,0,-9)$.

в) Како је $\vec{v}_a\cdot\vec{n}_\beta = 3$, вектори $\vec{v}_a$ и $\vec{n}_\beta$ нису узајамно нормални, па је $a\cap\beta\neq\emptyset$.

г) Како је

$$\cos\angle(\vec{v}_a,\vec{n}_\beta) = \frac{\vec{v}_a\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{v}_a|\cdot|\vec{n}_\beta|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

тражени угао је $45°$.

д) Из једнакости $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \angle(\vec{v}_a,\vec{n}_\beta)$ следи $\varphi = 45°$.

Из **а)** и **б)** имамо правац и тачку праве a, па је њена једначина $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$, односно у параметарском облику $x=2$, $y=t-2$, $z=t$. Заменом ових израза у једначини равни β добијамо $t=-3$, па је $a\cap\beta = M(2,-5,-3)$.

3. а) Одредити Маклоренове полиноме другог степена функција

$$g_1(t) = \sqrt[7]{1+t}, \qquad g_2(x) = \cos 5x \qquad \text{и} \qquad g_3(x) = \sqrt[7]{\cos 5x}.$$

б) Израчунати:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{\cos 5x}-\sqrt[5]{\cos 7x}}{x^2}.$$

Решење: **а)** На основу познатих Маклоренових развоја за $(1+x)^a$ и $\cos x$ имамо

$$g_1(t) = (1+t)^{1/7} = 1+\frac{1}{7}t+\binom{1/7}{2}t^2+o(t^2),$$

$$g_2(x) = 1-\frac{(5x)^2}{2}+o(x^2) = 1-\frac{25}{2}x^2+o(x^2),$$

$$g_3(x) = (\cos 5x)^{1/7} = \left(1-\frac{25}{2}x^2+o(x^2)\right)^{1/7} = 1-\frac{25}{14}x^2+o(x^2),$$

$$g_4(x) = (\cos 7x)^{1/5} = \left(1-\frac{49}{2}x^2+o(x^2)\right)^{1/5} = 1-\frac{49}{10}x^2+o(x^2),$$

па су тражени Маклоренови полиноми P (за g_1), Q (за g_2) и R (за g_3) дати са

$$P(t) = 1+\frac{1}{7}t-\frac{3}{49}t^2, \quad Q(x) = 1-\frac{25}{14}x^2, \quad R(x) = 1-\frac{49}{10}x^2.$$

б) Користећи развоје из **а)** имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 5x)^{1/7}-(\cos 7x)^{1/5}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{25}{4}x^2-\left(1-\frac{49}{10}x^2\right)+o(x^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{109}{35}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{109}{35}+o(1)\right)\\
&= \frac{109}{35}.
\end{aligned}$$

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x)=(x-2)e^{-1/x}$.

Решење: (1) Из $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ и

$$f(x)\to\begin{cases}0, & x\to 0_+\\ -\infty, & x\to 0_-\end{cases}$$

следи да је $x=0$ вертикална асимптота (са леве стране). Из

$$f(x)=(x-2)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x-3+o(1),\quad z\to\infty$$

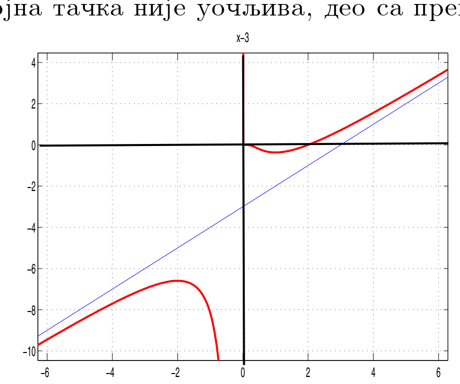
следи да је $y=x-3$ коса асимптота.

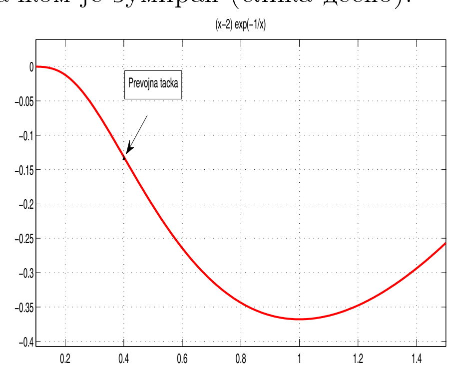
Нула функције је $x_0=2$, функција је негативна на интервалима $(-\infty,0)$ и $(0,2)$ и позитивна на $(2,+\infty)$.

(2) Из $f'(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}e^{-1/x}$ следи да је функција опадајућа на интервалима $(-2,0)$ и $(0,1)$, растућа на интервалима $(-\infty,-2)$ и $(1,+\infty)$, има локални максимум у тачки $x_1=-2$ (једнак $-4\sqrt{e}$) и локални минимум у тачки $x_2=1$ (једнак $-1/e$).

(3) Из $f''(x)=\dfrac{5x-2}{x^4}e^{-1/x}$ следи да је функција конвексна на интервалу $(x_3,+\infty)$, а конкавна на интервалима $(-\infty,0)$ и $(0,x_3)$, где је $x_3=2/5$. График функције има превојну тачку $P\left(x_3,-\dfrac{8}{5}e^{-5/2}\right)$.

На основу података из (1)-(3) лако је скицирати график функције f (слика лево). Пошто превојна тачка није уочљива, део са превојном тачком је зумиран (слика десно).





Драган Ђорић