ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ

Основне информације

Драган Ђорић

1. Ирационални бројеви имају бесконачан децимални запис у којем не постоји периодичност. Школски примери ирационалних бројева су бројеви $\sqrt{p}$, где је p прост број. Тако је за $p = 2$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242 09\ldots$$

То значи да само оваквих ирационалних бројева има бесконачно. Али осим ових, постоји још бесконачно много других ирационалних бројева. Штавише, скуп ирационалних бројева је непребројив.

2. Скуп ирационалних бројева је свуда густ у $\mathbb{R}$, што значи да се између свака два реална броја налази бар један ирационалан број. Из ове чињенице следи да се између свака два реална броја налази бесконачно много ирационалних бројева.

3. Ирационалност броја $\sqrt{2}$ је била позната још пре нове ере. Старогрчки математичари су за доказ да је $\sqrt{2}$ ирационалан број користили методу *претпоставимо супротно*, при чему претпоставка да је $\sqrt{2}$ рационалан број за последицу има неку контрадикцију или апсурд. На сличан начин може да се докаже и да је $\sqrt{n}$ ирационалан број ако $n \in \mathbb{N}$ није потпун квадрат[1]. Аналогно важи и за $\sqrt[k]{n}$ ако n није k-ти степен природног броја.

4. Поред броја $\sqrt{2}$, веома је познат и популаран[2] ирационалан[3] број π. Оба ова броја представљају одређене константе у ге-

[1] Претпоставимо да је $\sqrt{n} = a/b$, где је b најмањи природан број за који је $b\sqrt{n} \in \mathbb{N}$. Ако је m цео део броја $\sqrt{n}$, тада је $m < \sqrt{n} < m + 1$ (јер n није потпун квадрат). Из ових неједнакости следи да је $0 < \sqrt{n} - m < 1$, односно да је

$$0 < (\sqrt{n} - m)b < b.$$

То значи да је $c = (\sqrt{n} - m)b$ природан број и да је $c\sqrt{n} \in \mathbb{N}$. Како је $c < b$, имамо контрадикцију са претпоставком да је b најмањи број за који важи то својство. Према томе, није одржива полазна претпоставка да је $\sqrt{n}$ рационалан број.

[2] Постоји и палиндром *I prefer pi*.

[3] Ирационалност броја π доказана је тек 1761. године

ометрији. Број $\sqrt{2}$ је однос дијагонале и странице квадрата (било ког), а број π је однос обима и пречника круга (било ког). Међутим, између ова два ирационална броја постоји велика разлика. Док је $\sqrt{2}$ нула полинома $x^2 - 2$, за број π нешто слично томе не важи. Наиме, не постоји полином са рационалним коефицијентима такав да је π нула тог полинома. У том смислу је $\sqrt{2}$ *алгебарски број* (решење алгебарске једначине $x^2 - 2 = 0$), а π није алгебарски, већ је *трансцендентни број*[4]. Први доказ да је π трансцендентан број је објављен 1882. године, а 1939. године се појављује једноставнији, сасвим елементаран доказ[5]. У том доказу се користи фамозна[6] једнакост $e^{i\pi} + 1 = 0$.

5. Збир, разлика, производ и количник два ирационална броја може да буде рационалан број, а може да буде и ирационалан број. За сваки од ових случајева постоје тривијални примери.

6. За ирационалне бројеве a и b, број a^b може да буде ирационалан, али може да буде и рационалан! За ово последње не знам конкретан пример за a и b, али се лако показује да постоји такав пар бројева. На пример, ако је $a = b = \sqrt{2}$ и ако је a^b рационалан број, онда су a и b један такав пар. Ако је, пак $a^b = c \notin \mathbb{Q}$, онда су c и a ирационални бројеви, а број c^a је рационалан ($c^a = \sqrt{2}^2 = 2$).

7. За неке реалне бројеве још увек није познато да ли су рационални или ирационални. Такви примери су бројеви: $e + \pi$, $e - \pi$, $e\pi$, 2^e, 2^π, π^e, $\pi^{\sqrt{2}}$, e^e, $\log \pi$.

8. У разним израчунавањима уместо ирационалних могу да се користе њима блиски рационални бројеви. На пример[7], једноставан разломак $99/70$ се тек на трећој децимали разликује од броја $\sqrt{2}$. Разломак $355/113$ се тек на осмој децимали разликује од броја π (направљен је од прве три непарне цифре, свака се понавља по два пута), а постоје подаци да су овај разломак користили кинески астрономи још пре нове ере.

[4] Сама реч *трансцендентни* подразумева нешто мистично.

[5] Објавио га је Ivan Niven у часопису *American Mathematical Monthly*.

[6] Ова једнакост повезује пет најважнијих математичких константи.

[7] Занимљиво је да је овај разломак једнак односу дужине и ширине папира познатог формата A4 јер је $99/70 = 297/210$ (дужина папира A4 је $297mm$, а ширина $210mm$).