МАТЕМАТИКА 1

Писмени испит, јануар 2009 - Група 2

1. Нека је

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix},\ a, b, \in R \right\}.$$

a) Доказати да M у односу на матрично сабирање и множење чини комутативни прстен са јединицом.

b) Испитати да ли је структура $(M, +, \cdot)$ поље.

Решење: a) Нека је $M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$.

1. $(M, +)$ *је Абелова група*. Из

$$M_{a,b} + M_{c,d} = M_{a+c,b+d}, \quad a+c, b+d \in R$$

   следи затвореност, $M_{0,0}$ је неутрални елемент, важи комутативност, а матрица $M_{-a,-b}$ је инверзна за матрицу $M_{a,b}$.

2. $(M, \cdot)$ *је комутативна полугрупа са јединицом*. Из

$$M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{a+2bd,bc+ad}$$

   следи затвореност и комутативност множења у скупу M. Неутрални елемент је јединична матрица реда 2, а асоцијатвност множења матрица важи у општем случају.

3. *У* $(M, +, \cdot)$ *важе оба дистрибутивна закона*. На пример,

$$(M_{a,b} + M_{c,d}) \cdot M_{e,f} = M_{(a+c)e+2(b+d)f,(b+d)e+(a+c)f} = M_{a,b} \cdot M_{e,f} + M_{c,d} \cdot M_{e,f}.$$

Из 1.-3. следи да је $(M, +, \cdot)$ комутативни прстен са јединицом.

b) У скупу $(M \setminus \{O_{2,2}\})$ немају сви елементи инверзни елемент у односу на множење (на пример, $M_{\sqrt{2},1}$ нема инверзну матрицу). Према томе, структура $(M, +, \cdot)$ није поље.

2. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 3z & = & -3 \\ 2x & + & ky & - & z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & kz & = & 1 \end{array}$$

у зависности од реалног параметра k.

Решење: Дати систем је еквивалентан систему

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3z & = & -3 \\ & y + & \frac{k+3}{2} z & = & 2 \\ & & (k+5)(2-k)z & = & 4(2-k) \end{array}$$

1. За $k \notin \{-5, 2\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-3\frac{k+1}{k+5}, \frac{4}{k+5}, \frac{4}{k+5} \right).$$

2. За $k = -5$ систем није сагласан (последња једначина је $0 = 14$).

3. За $a = 2$ систем има једнопараметарски скуп решења

$$\mathcal{R}_t = \left\{ \left(-3 + 3t, 2 - \frac{5}{2}t, t \right), \ t \in R \right\}.$$

Напомена: До 1. може да се дође и Крамеровим правилом, при чему је

$$D = (k+5)(k-2), \quad D_x = -3(k+1)(k-2), \quad D_y = D_z = 4(k-2).$$

3. Раван $\pi: \ x - 4y + 2z - 7 = 0$ и права $p: \begin{cases} x - 2y - 4z + 3 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ имају заједничку тачку M. Одредити једначину праве q која садржи тачку M, припада равни π и нормална је на праву p.

Решење: Једначина праве p је $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ (добија се, на пример, решавањем система којим је дата права p).

Продор праве p кроз раван π је тачка $M(2, -1/2, 3/2)$, па једначина праве q има облик $\dfrac{x-2}{a} = \dfrac{y+1/2}{b} = \dfrac{z-3/2}{c}$. Из услова $q \perp p$ и $q \perp n_\pi$ добијамо $a = -2$, $b = 3$ и $c = 7$.

Према томе,

$$q: \ \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1/2}{3} = \frac{z-3/2}{7}.$$

4. *a*) Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 1} \right)^{4n-3}$.

b) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је

$$a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 1} + \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 1} \right)^{4n-3}.$$

Решење: *a*) Како је $a_n = \left(1 + \dfrac{-3n + 4}{n^2 + 2n - 1} \right)^{4n-3}$ лако налазимо да $a_n \to e^{-12}$ када $n \to \infty$.

b) Нека је $a_n = b_n + c_n$, где је $b_n = \dfrac{(1 + (-1)^n)n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 1}$. Како је

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 1}, & n = 2k \\ \dfrac{-n + 3}{n^2 + 2n - 1}, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

тачке нагомилавања низа (b_n) су 2 и 0, а из *a*) следи да низ (c_n) има само једну тачку нагомилавања.

Према томе, тачке нагомилавања низа (a_n) су e^{-12} и $2 + e^{-12}$.

5. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \ln^2(x+2) - 6\ln(x+2) + 5$.

Решење: (1) Из $D_f = (-2, +\infty)$ и $f(x) \to +\infty$ када $x \to -2_+$ следи да је $x = -2$ вертикална асимптота (с десне стране). Из $f(x) \to +\infty$ када $x \to +\infty$ следи да функција нема хоризонталну асимптоту, а из $f(x)/x \to 0$ када $x \to +\infty$ следи да функција нема ни косу асимптоту.

Нуле функције су $x_1 = e - 2$ и $x_2 = e^5 - 2$, функција је негативна на интервалу (x_1, x_2) и позитивна на $D_f \setminus [x_1, x_2]$.

(2) Из $f'(x) = 2\dfrac{\ln(x+2) - 3}{x+2}$ следи да је функција опадајућа на $(-2, x_3)$, растућа на $(x_3, +\infty)$, где је $x_3 = e^3 - 2$ и да има локални минимум у тачки x_3 који је једнак -4.

(3) Из $f''(x) = 2\dfrac{4 - \ln(x+2)}{(x+2)^2}$ следи да је функција конвексна на интервалима $(-2, x_4)$, а конкавна на интервалу $(x_4, +\infty)$, где је $x_4 = e^4 - 2$. График функције има превојну тачку $P(x_4, -3)$.

На основу података из (1)-(3) лако је скицирати график функције f.

Драган Ђорић