Јул 2024

1. Одредити све локалне екстремуме функције $z = f(x, y)$ задате имплицитно једначином:

$$z^2 + 3x^2 + y^2 + 3xy - xz - y + \frac{4}{3} = 0.$$

2. Одредити најмању и највећу вредност функције

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - y$$

на области $D = \{(x, y) : x^2 + (y+1)^2 \leq 4,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$.

3. Израчунати $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \ln(x^2+3)\, \mathrm{d}x$.

4. Израчунати

$$\iint\limits_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

где је област D ограничена линијама $y = \sin 2x$, $x = 0$ и $\dfrac{4}{\pi}x + y = 2$.

Решења:

1. Нека је $F(x, y, z) = z^2 + 3x^2 + y^2 + 3xy - xz - y + \frac{4}{3} = 0$ тако да је функција $z = f(x, y)$ имплицитно задата једначином $F(x, y, z) = 0$. Диференцирањем једнакости из задатка по x и y, редом, добијамо:

$$z'_x(2z - x) = z - 6x - 3y, \tag{1}$$

$$z'_y(2z - x) = 1 - 3x - 2y. \tag{2}$$

Стационарне тачке ћемо тражити из услова $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ и $F(x, y, z) = 0$. Из прве две једнакости добијамо да је $x = \dfrac{1-2y}{3}$, односно $z = 2 - y$, одакле је, након краћег рачуна,

$$F\left(\frac{1-2y}{3}, y, 2-y\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2 - 11y + 15 = 0.$$

Решавањем последње једначине, добијамо да је $y = -\dfrac{5}{2} \vee y = 3$, па једноставно закључујемо да су стационарне тачке $S_1\left(-\dfrac{5}{3}, 3\right)$ и $S_2\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{2}\right)$, и при томе је $z(S_1) = -1$ и $z(S_2) = -\dfrac{1}{2}$.

Диференцирањем једнакости (1) по x и y, и једнакости (2) по y, добијамо

$$\begin{aligned} z''_{xx}(2z-x) &= 2z'_x - 2(z'_x)^2 - 6, \\ z''_{xy}(2z-x) &= z'_y - 2z'_x z'_y - 3, \\ z''_{yy}(2z-x) &= -2(z'_y)^2 - 2. \end{aligned}$$

За стационарне тачке важи $z''_{xx}(S_1) = 18$, $z''_{xy}(S_1) = 9$, $z''_{yy}(S_1) = 6$ и $z''_{xx}(S_2) = -18$, $z''_{xy}(S_2) = -9$, $z''_{yy}(S_2) = -6$.

Ако су D_1 и D_2 главни минори Хесеове матрице $\begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{bmatrix}$, онда је у тачки S_1:

$$D_1 = 18 > 0 \ \text{ и } \ D_2 = \begin{vmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0,$$

а у тачки S_2:

$$D_1 = -18 < 0 \ \text{ и } \ D_2 = \begin{vmatrix} -18 & -9 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$

На основу Силвестеровог критеријума, функција $z = f(x, y)$ има локални минимум у тачки S_1 и локални максимум у тачки S_2 који износе

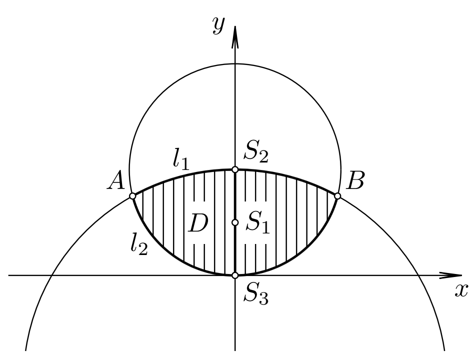
$$\begin{aligned} z_{\min} &= z(S_1) = -1 \\ z_{\max} &= z(S_2) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

2. Нека су A и B пресечне тачке датих кружница. Из система

$$\begin{aligned} x^2 + (y+1)^2 &= 4 \\ x^2 + (y-1)^2 &= 1, \end{aligned}$$

једноставно се добија да је $y = \frac{3}{4}$ и $x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, односно пресечне тачке су $A\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ и $B\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Границу области D чине отворени лукови датих кругова l_1 и l_2, одређени тачкама A и B, као и тачке A и B (видети слику).



Кандидате за најмању и највећу вредност ћемо тражити међу стационарним тачкама у унутрашњости облсти D и на граници, као и међу тачкама A и B.

Из услова $f'_x = f'_y = 0$, односно $2x = 2y - 1 = 0$, добијамо $S_1(0, \frac{1}{2}) \in \mathrm{int}D$, па имамо једног кандидата за најмању и највећу вредност.

За границу l_1 формирамо Лагранжову функцију

$$L_1(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 - y + \lambda(x^2 + (y+1)^2 - 4),$$

чије стационарне тачке тражимо из $(L_1)'_x = (L_1)'_y = 0$ и $x^2 + (y+1)^2 = 4$, односно из система

$$\left.\begin{array}{ll} 2x(1+\lambda) & = 0 \\ 2y(1+\lambda) & = 1 - 2\lambda \\ x^2 + (y+1)^2 & = 4 \end{array}\right\}$$

чијим решавањем добијамо да је $x = 0$, $y = \pm 1$. Имајући у виду границе криве l_1, видимо да је једини кандидат тачка $S_2(0, 1)$.

Слично, за границу l_2 формирамо Лагранжову функцију

$$L_2(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 - y + \lambda(x^2 + (y-1)^2 - 1),$$

па из $(L_2)'_x = (L_2)'_y = 0$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$, добијамо систем

$$\left.\begin{array}{ll} 2x(1+\lambda) & = 0 \\ 2y(1+\lambda) & = 1 + 2\lambda \\ x^2 + (y-1)^2 & = 1 \end{array}\right\}$$

из ког налазимо да је $x = 0$ и $y = 0 \vee y = 2$, па закључујемо да нас занима само тачка $S_3(0, 0) \in l_2$.

Коначно, пошто је $f(A) = f(B) = \frac{3}{4}$, $f(S_1) = -\frac{1}{4}$, $f(S_2) = 0$ и $f(S_3) = 0$, закључујемо да је

$$f_{\min} = f(S_1) = -\frac{1}{4},$$
$$f_{\max} = f(A) = f(B) = \frac{3}{4}.$$

$\square$

3. Применом парцијалне интеграције, при чему је $u = \ln(x^2+3)$ и $\mathrm{d}v = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, а одатле $\mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ и $v = \sqrt{x^2+1}$, добијамо да је

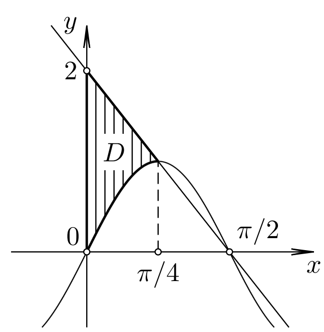
$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x \\
=&\sqrt{x^2+1}\ln(x^2+3) - \int \sqrt{x^2+1}\cdot\frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x \\
=&\begin{bmatrix} x^2+1=t^2 \\ 2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \sqrt{x^2+1}\ln(x^2+3) - \int \frac{2t^2}{t^2+2}\,\mathrm{d}t \\
=&\sqrt{x^2+1}\ln(x^2+3) - \int \left(2 - \frac{4}{t^2+2}\right)\,\mathrm{d}t \\
=&\sqrt{x^2+1}\ln(x^2+3) - 2t + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C \\
=&\sqrt{x^2+1}\ln(x^2+3) - 2\sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}\right) + C,
\end{aligned}
$$

при чему је искоришћен познат резултат

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$\square$

4. Није тешко увидети да се права $y = 2 - \frac{4}{\pi}x$ и крива $y = \sin 2x$ први пут секу у тачки $(\frac{\pi}{4}, 1)$. Дата област D је означена на слици и можемо је представити као:



$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \sin 2x \le y \le 2 - \frac{4}{\pi}x\right\}.$$

Одатле је

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{d}x \int\limits_{\sin 2x}^{2-\frac{4}{\pi}x} xy\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{y^2}{2}\bigg|_{\sin 2x}^{2-\frac{4}{\pi}x} x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\left(2-\frac{4}{\pi}x\right)^2 - \sin^2 2x\right)x\,\mathrm{d}y \qquad (3)\\
&= \frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/4}(\pi-2x)^2 x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} x\sin^2 2x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Како је

$$\int_0^{\pi/4} (\pi - 2x)^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (\pi^2 - 4\pi x + 4x^2) x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (\pi^2 x - 4\pi x^2 + 4x^3) \, \mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{\pi^2}{2} x^2 - \frac{4\pi}{3} x^3 + x^4 \right) \Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{11\pi^4}{768},$$

односно

$$\int_0^{\pi/4} x \sin^2 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} x \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/4} x \, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} x \cos 4x \, \mathrm{d}x \right)$$
$$\begin{bmatrix} u = x & \mathrm{d}v = \cos 4x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \frac{\sin 4x}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{x}{4} \sin 4x \Bigg|_0^{\pi/4} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \sin 4x \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\cos 4x}{4} \Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{16}.$$

то је, заменом добијених резултата у (3),

$$I = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{11\pi^4}{768} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{16} \right) = \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{32}.$$

$\square$