

Јун 2024

1. Написати Тејлоров полином другог степена који у околини тачке $B(2, 0)$ апроксимира функцију $z = f(x, y)$ задату имплицитно једначином:

$$z^2(1+x) - x^2 + 5y^2 + xyz = 24, \quad z > 0$$

2. Одредити све екстремне вредности функције

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - y^2,$$

при услову $x^2y = \sqrt{2}$.

3. Израчунати $\int x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$.

4. Израчунати:

$$\iint_D y^3 dx dy,$$

где је област $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

Решења:

1. Заменом $x = 0$ и $y = 2$ у дату једнакост добијамо једначину $z^2 = 4$, $z > 0$, чије је решење $z = 2$, те је $z(B) = 2$.

Диференцирањем дате једнакости по x и y , редом добијамо:

$$(1) \quad z'_x(xy + 2xz + 2z) = 2x - yz - z^2,$$

$$(2) \quad z'_y(xy + 2xz + 2z) = -xz - 10y.$$

Заменом $x = 0$, $y = 2$ и $z = 2$ у (1) и (2) добијамо да је $z'_x(B) = -2$ и $z'_y(B) = -5$.

Диференцирањем једнакости (1) по x и y , и једнакости (2) по y , редом добијамо

$$(3) \quad \begin{aligned} z''_{xx}(xy + 2xz + 2z) &= 2 - 2yz'_x - 4zz'_x - 2(1+x)(z'_x)^2, \\ z''_{xy}(xy + 2xz + 2z) &= -z - yz'_y - xz'_x - 2zz'_y - 2(1+x)z'_xz'_y, \\ z''_{yy}(xy + 2xz + 2z) &= -2xz'_y - 10 - 2(1+x)(z'_y)^2. \end{aligned}$$

Заменом $x = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $z'_x = -2$ и $z'_y = -5$ у (3) добијамо да је $z''_{xx}(B) = \frac{9}{2}$, $z''_{xy}(B) = 2$ и $z''_{yy}(B) = -15$.

На крају, заменом добијених вредности у

$$T_2(x, y) = z(B) + z'_x(B)\Delta x + z'_y(B)\Delta y + \frac{1}{2}(z''_{xx}(B)\Delta x^2 + 2z''_{xy}(B)\Delta x\Delta y + z''_{yy}(B)\Delta y^2)$$

($\Delta x = x - 0 = x$, $\Delta y = y - 2$) добијамо тражени Тејлоров полином:

$$T_2(x, y) = 2 - 2x - 5(y - 2) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}x^2 + 4x(y - 2) - 15(y - 2)^2\right).$$

□

2. Ако је $\varphi = x^2y - \sqrt{2}$, тада је одговарајућа Лагранжова функција

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = \frac{1}{x} - y^2 + \lambda(x^2y - \sqrt{2})$$

Стационарне тачке ћемо тражити из система $L'_x(x, y) = 0$, $L'_y(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$ тј.

$$(4) \quad -\frac{1}{x^2} + 2\lambda xy = 0,$$

$$(5) \quad -2y + \lambda x^2 = 0,$$

$$(6) \quad x^2y - \sqrt{2} = 0.$$

Из једначине (5) добијамо $y = \frac{\lambda x^2}{2}$, па, заменом у (4) и (6), добијамо да је $\lambda^2 x^5 = 1$ и $\lambda x^4 = 2\sqrt{2}$. Одатле није тешко добити да је $x = 2$ и $\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{x^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, а одатле и $y = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Дакле, једина стационарна тачка је $S(2, \frac{\sqrt{2}}{4})$ за $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Како је $L''_{xx} = \frac{2}{x^3} + 2\lambda y$, $L''_{xy} = 2\lambda x$ и $L''_{yy} = -2$, то за други диференцијал Лагранжове функције у стационарној тачки важи

$$(7) \quad d^2L(S) = \frac{3}{8} dx^2 + \sqrt{2} dx dy - 2 dy^2.$$

Из услова $d\varphi(x, y) = 0$ тј. $2xy dx + x^2 dy = 0$ у тачки S добијамо да је $dy = -\frac{\sqrt{2}}{4} dx$, односно заменом у (7) имамо да важи

$$(8) \quad d^2L(S) = \frac{3}{8} dx^2 - \frac{1}{2} dx^2 - \frac{1}{4} dx^2 = -\frac{3}{8} dx^2 < 0, \text{ за } dx \neq 0.$$

Из (8) следи да функција f има локални максимум у тачки S који износи

$$f_{max} = \frac{3}{8}.$$

□

3. Применом парцијалне интеграције, при чему је $u = x^2$ и $dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ а одатле $du = 2x dx$ и $v = -\frac{1}{2\sin^2 x}$, добијамо

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx &= -\frac{x^2}{2\sin^2 x} + \int \frac{x}{\sin^2 x} dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ du = 2x dx \quad v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right] \\ &= -\frac{x^2}{2\sin^2 x} - x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= -\frac{x^2}{2\sin^2 x} - x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

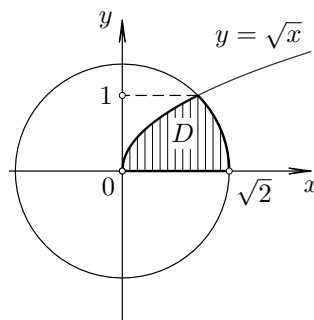
□

4. Дата област D је означена на слици и можемо је представити као:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{2-y^2} \right\}.$$

Одатле је

$$\begin{aligned} I &= \iint_D y^3 dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} y^3 dx \\ &= \int_0^1 y^3 (\sqrt{2-y^2} - y^2) dy = \left[\begin{array}{l} t = y^2 \\ dt = 2y dy \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t (\sqrt{2-t} - t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t \sqrt{2-t} dt - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



Како је

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \sqrt{2-t} dt &= \left[\begin{array}{l} u = 2-t \\ du = -dt \end{array} \right] = \int_1^2 (2-u) \sqrt{u} du = \int_1^2 (2\sqrt{u} - u\sqrt{u}) du \\ &= \left(\frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5} \right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{16\sqrt{2} - 14}{15}, \end{aligned}$$

то је, коначно, $I = \frac{16\sqrt{2} - 14}{15} - \frac{1}{6} = \frac{32\sqrt{2} - 33}{30}$.

□