МАТЕМАТИКА 1

Фебруар 2010 - Група III

1. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -6x & + & cy & - & 3z & = & -4 \\ 6x & - & cy & + & (c+1)z & = & c+2 \end{array} .$$

у зависности од реалног параметра c.

Решење: Систем може да се реши Крамеровим правилом. Израчунавањем одговарајућих детерминанти добијамо

$$D = 2(c-2)(c-3), \quad D_x = (c-1)(c-2), \quad D_y = 4(c-2), \quad D_z = 2(c-2)(c-3).$$

1. За $c \notin \{2,3\}$ систем има јединствено решење
$$(x,y,z) = \left(\frac{c-1}{2(c-3)}, \frac{2}{c-3}, 1\right).$$
2. За $c = 3$ је $D_x \neq 0$, па систем није сагласан.
3. За $c = 2$ систем је еквивалентан систему
$$2x - y + z = 2, \quad -6x + 2y - 3z = -4$$
који има једнопараметарски скуп решења
$$\mathcal{R}_\alpha = \{(\alpha, -2, -2\alpha) \mid \alpha \in R\}.$$

Напомена. Наравно, систем може еквивалентним трансформацијама да се сведе на степенасти облик, па да се онда примени Гаусов алгоритам (уз одговарајућу дискусију) или опет Крамерово правило.

2. Дате су праве a и b у простору:

$$a\colon \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1} \qquad \text{и} \qquad b\colon \begin{cases} x - 2y + 2z - 3 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор правца $\vec{v}_b$ праве b.

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in b$.

в) Одредити међусобни положај правих a и b.

г) Уколико се праваe a и b секу, одредити величину угла φ између њих и заједничку тачку M, а уколико се не секу одредити растојање између њих.

Решење:

а) Из једначине праве a је $\vec{v}_a = (1,1,-1)$, док је
$$\vec{v}_b = (1,-2,2) \times (3,-5,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 6i + 4j + k,$$
односно $\vec{v}_b = (6,4,1)$.

б) На пример, $A(-1,0,5)$ и $B(1,2,3)$.

в) Како је

$$[\vec{v}_a, \vec{v}_b, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

праве a и b припадају истој равни. Вектори $\vec{v}_a$ и $\vec{v}_b$ нису колинеарни, што значи да се праве a и b секу.

г) Величина угла φ је одређена са

$$\cos\angle(\vec{v}_a, \vec{v}_b) = \frac{\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{|\vec{v}_a| \cdot |\vec{v}_b|} = \frac{9}{\sqrt{3}\sqrt{53}}.$$

Из једначине праве a имамо да је $x = y - 1$ и $z = -y + 5$. Заменом ових израза у једначине праве b, добијамо $x = 1$, $y = 2$ и $z = 3$. Према томе, заједничка тачка је управо тачка B из б).

3. Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан дат са

$$a_n = \frac{2n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 1}}{n + 3}$$

и одредити граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty}$ ако постоји.

Решење: Из неједнакости $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$ следи да је

$$b_n = \frac{n}{n + 3} < a_n < \frac{n + 1}{n + 3} = c_n.$$

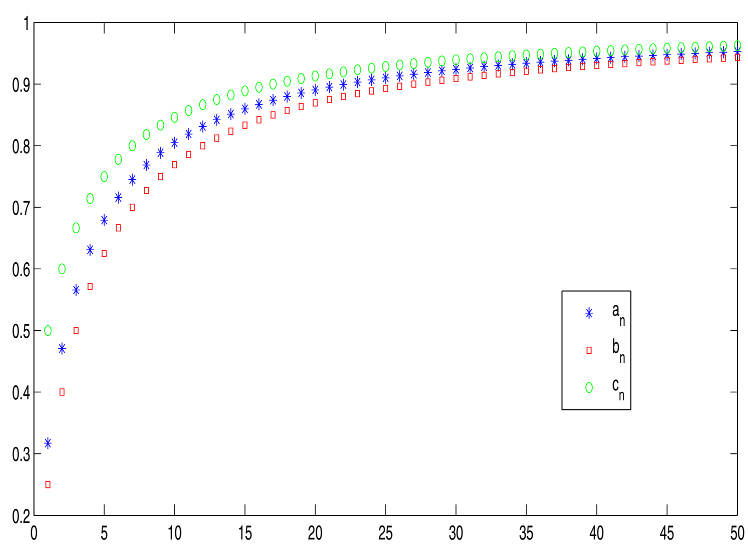
Како низови (b_n) и (c_n) конвергирају ка броју 1, то и низ (a_n) (Теорема о три низа) конвергира, при чему је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Друго решење. Како је

$$a_n = \frac{2 + 1/n - \sqrt{1 + 1/n + 1/n^2}}{1 + 3/n} = \frac{u_n - v_n}{w_n}$$

и како $u_n \to 2$, $v_n \to 1$ и $w_n \to 1$ када $n \to \infty$, низ (a_n) конвергира ка броју 1.

На слици су дати графици низова (a_n), (b_n) и (c_n).



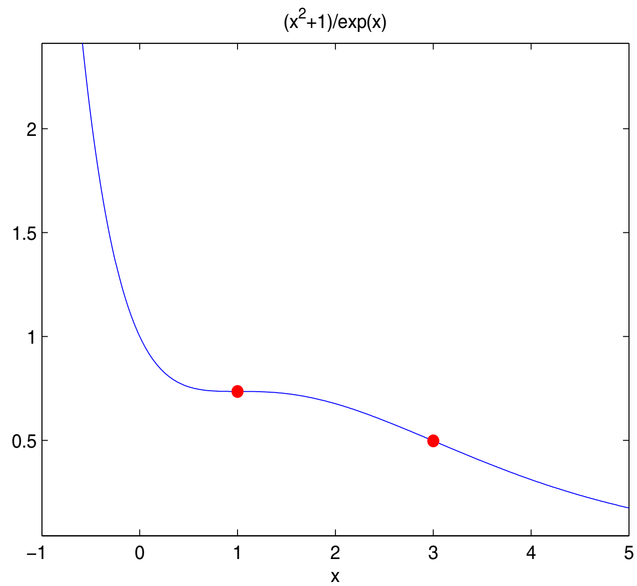
4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$.

Решење: (1) Пошто је $D_f = R$, функција нема вертикалних асимптота. За $x \to +\infty$ хоризонтална асимптота је x-оса (јер је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$), док за $x \to -\infty$ функција нема ни хоризонталну ни косу асимптоту (јер је $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x = +\infty$. Функција нема ни нуле, јер је $f(x) > 0$ за свако $x \in D_f$.

(2) Из $f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$ следи да функција опада на D_f. Стационарна тачка $x = 1$ није тачка локалног ектремума.

(3) Из $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$ следи да је функција конвексна на интервалима $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, а конкавна на интервалу $(1, 3)$. График функције има превојне тачке $P\,(1, 2/e)$ и $Q\,\big(3, 10/e^3\big)$.

На основу података из (1)-(3) лако је скицирати график функције f. На слици су означене превојне тачке.



Драган Ђорић