МАТЕМАТИКА 1

Фебруар 2011 - Група II

1. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a+1)x & - & y & + & z & = & 2a+3 \\ -x & + & (a+1)y & - & z & = & -3 \\ 3x & - & 3y & + & (a+3)z & = & 4 \end{array}$$

у зависности од вредности реалног параметра a.

Решење: Нека је D детерминанта датог система. За $D \neq 0$ систем може да се реши применом Крамерових формула (видети НУ[1], стр.75), а случајеви када је $D = 0$ разматрају се посебно.

1. Како је $D = a^2(a+5)$, за $a \notin \{-5, 0\}$ систем има јединствено решење $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right)$, где је

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a+3 & -1 & 1 \\ -3 & a+1 & -1 \\ 4 & -3 & a+3 \end{vmatrix} = 5a + 11a^2 + 2a^3 = a(a+5)(2a+1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a+1 & 2a+3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & a+3 \end{vmatrix} = -5a - a^2 = -a(a+5),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 2a+3 \\ -1 & a+1 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -10a - 2a^2 = -2a(a+5).$$

Према томе,

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{2a+1}{a}, \quad y = \frac{D_y}{D} = -\frac{1}{a}, \quad z = \frac{D_z}{D} = -\frac{2}{a}.$$

2. За $a = 0$ имамо систем

$$x - y + z = 3, \quad -x + y - z = -3, \quad 3x - 3y + 3z = 4$$

које није сагласан (видети прву и трећу једначину).

3. За $a = -5$ имамо систем

$$-4x - y + z = -7, \quad -x - 4y - z = -3, \quad 3x - 3y - 2z = 4$$

који је еквивалентан систему

$$x + 4y + z = 3, \quad 3x - 3y - 2z = 4.$$

Ранг матрице овог система је једнак 2 јер је, на пример, минор M_{12}^{12} различит од нуле (за ознаку видети НУ, стр.50). Ако променљиву z узмемо за слободан параметар, $z = \alpha$, онда решавањем система

$$x + 4y = 3 - \alpha, \quad 3x - 3y = 4 + 2\alpha$$

добијамо једнопараметарски скуп решења

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \left(\frac{\alpha+5}{3}, \frac{1-\alpha}{3}, \alpha \right),\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Дакле, у овом случају $(x, y, z) \in \mathcal{R}_\alpha$.

---

[1] Нови Уџбеник *'Математика 1'*

2. Дате су тачке $A(2,-1,1)$, $B(3,2\alpha,1)$, $C(4,2,\alpha+2)$ и $D(5,1,\alpha)$ у простору.

а) Одредити вредност параметра α за коју су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно зависни.

б) За $\alpha=1$ одредити једначину равни π одређену тачкама A, B и C.

в) За $\alpha=1$ израчунати растојање тачке D од равни π.

г) За $\alpha=1$ израчунати површину троугла ABC и запремину тетраедра $ABCD$.

Решење:

а) Вектори $\overrightarrow{AB}=(1,2\alpha+1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3,\alpha+1)$ и $\overrightarrow{AD}=(3,2,\alpha-1)$ су линеарно зависни ако и само ако су компланарни (видети НУ, Теорема 6.1, стр.99), односно ако и само ако је $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=0$ (видети НУ, Теорема 6.7, стр.109). Како је

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}1 & 2\alpha+1 & 0\\ 2 & 3 & \alpha+1\\ 3 & 2 & \alpha-1\end{vmatrix}=2\alpha(\alpha+6),$$

то значи да су дати вектори линеарно зависни за $\alpha\in\{-6,0\}$.

б) Једначина равни π одређене тачкама $A(2,-1,1)$, $B(3,2,1)$ и $C(4,2,3)$ је (видети НУ, стр.118)

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=0,$$

односно $6x-2y-3z-11=0$.

в) Растојање тачке $D(5,1,1)$ од равни π (видети НУ, стр.121) дато је са

$$d(D,\pi)=\frac{|6\cdot 5-2\cdot 1-3\cdot 1-11|}{\sqrt{36+4+9}}=2.$$

г) Како је $P_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ и

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=6\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}=(6,-2,-3),$$

то је

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4+9}=\frac{7}{2}.$$

Ако за базу пирамиде $ABCD$ узмемо троугао ABC, онда је дужина њене висине једнака одстојању тачке D од равни π. Према томе,

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot P_{ABC}\cdot 2=\frac{7}{3}.$$

3. Дата је функција $g:(-1/3,+\infty)\to\mathbb{R}$ са

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2\ln(1+3x))-6x+9x^2}{x^3}, & x\neq 0\\ K, & x=0\end{cases}.$$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $t\mapsto\sin 2t$ и $x\mapsto\ln(1+3x)$, као и функције $x\mapsto\sin(2\ln(1+3x))$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

в) У зависности од вредности параметра K испитати непрекидност функције g.

Решење: **а)** Нека су S_3 и L_3 Маклоренови полиноми функција $t \mapsto \sin 2t$ и $x \mapsto \ln(1+3x)$. Из познатих формула за Маклоренове полиноме функција sin и ln (видети НУ, стр.233 и стр.235) имамо да је

$$S_3(t) = 2t - \frac{(2t)^3}{3!} = 2t - \frac{8}{6}t^3 = 2t - \frac{4}{3}t^3,$$

$$L_3(x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} = 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{3}x^3 = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3.$$

Помоћу полинома S_3 за $t = \ln(1+3x) = L_3(x) + o(x^3)$ када $x \to 0$ добијамо да је Маклоренов полином M_3 функције $x \mapsto \sin(2\ln(1+3x))$ дат са

$$M_3(x) = 6x - 9x^2 + 18x^3 - \frac{4}{3}(3x)^3 = 6x - 9x^2 + 18x^3 - 36x^3 = 6x - 9x^2 - 18x^3.$$

б) Нека је $g(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$ за $x \neq 0$. Како је $\sin(2\ln(1+3x)) = M_3(x) + o(x^3)$, то је

$$\begin{aligned} h(x) &= M_3(x) - 6x + 9x^2 + o(x^3) \\ &= 6x - 9x^2 - 18x^3 - 6x + 9x^2 + o(x^3) \\ &= -18x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

када $x \to 0$. Према томе,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-18x^3 + o(x^3)}{x^3} = -18.$$

в) За $K = -18$ функција g је непрекидна на $D_g = (-1/3, +\infty)$. За $K \neq -18$ функција g је непрекидна на интервалима $(-1/3, 0)$ и $(0, +\infty)$ (као количник двеју непрекидних функција, видети НУ, Теорема 10.3, стр.183), док у тачки $x = 0$ има прекид прве врсте јер је $g(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$.

Решење: (1) Решавањем неједначине $\dfrac{x}{x+2} \geq 0$ добијамо да је $D_f = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$. Пошто $f(x) \to 1$ када $x \to \pm\infty$, права $y = 1$ је хоризонтална асимптота. Права $x = -2$ је вертикална асимптота (слеве стране) јер је $\lim\limits_{x\to -2_-} f(x) = +\infty$, а у тачки $x = 0$ функција f је непрекидна с десне стране. За свако $x \in D_f$ је $f(x) \geq 0$, при чему је $f(0) = 0$.

(2) Како је

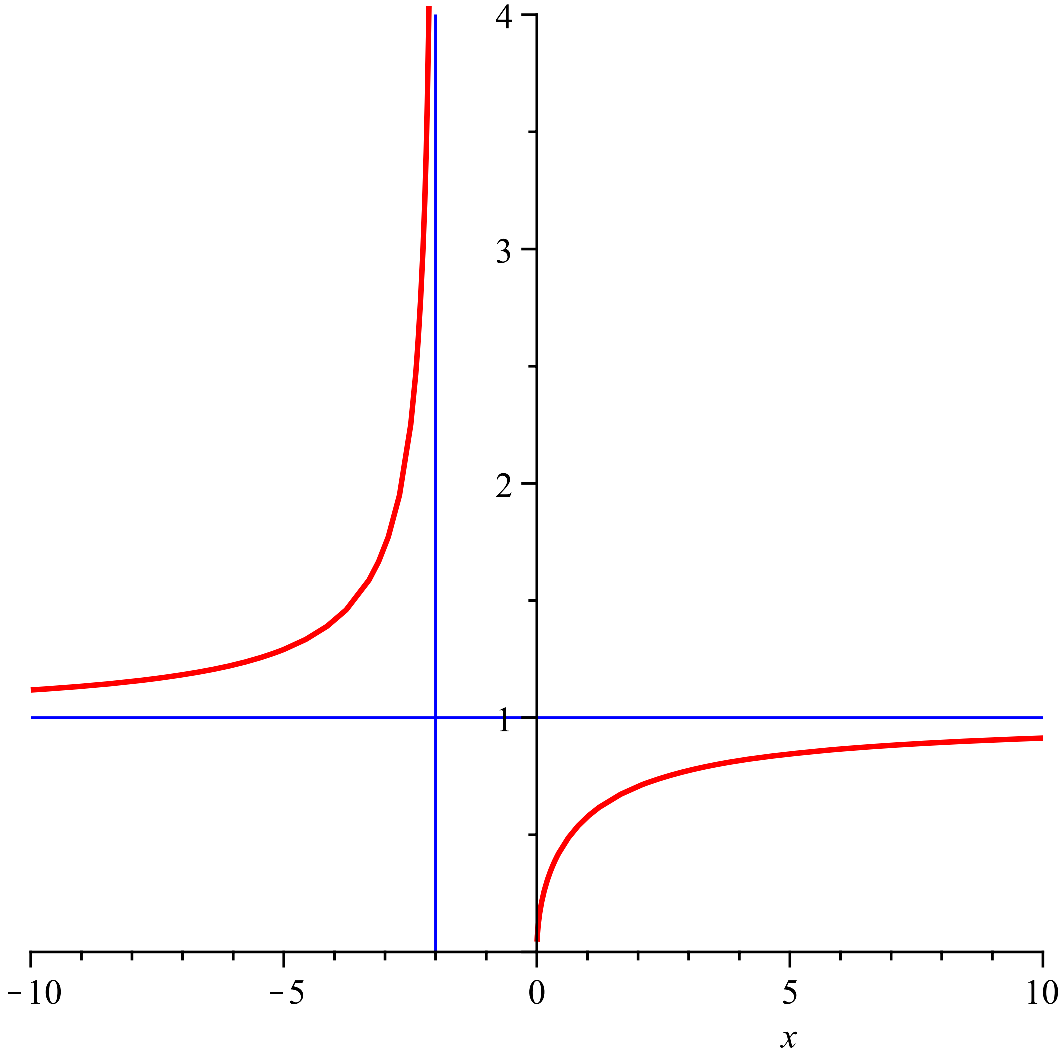
$$f'(x) = \frac{1}{f(x)(x+2)^2},$$

према Теореми 14.1 (НУ, стр.245) функција f је растућа на интервалима $(-\infty, -2)$ и $(0, +\infty)$. У тачки $x = 0$ функција има локални минимум.

(3) Из израза за други извод

$$f''(x) = -\frac{1+2x}{x(x+2)^3 f(x)} = -\frac{f(x)(1+2x)}{x^2(x+2)^2}$$

видимо да конвексност и конкавност одређује знак израза $1+2x$. За $x > 0$ је $f''(x) < 0$, а за $x < -2$ је $f''(x) > 0$. Према томе, функција је конвексна на интервалу $(-\infty, -2)$ и конкавна на интервалу $(0, +\infty)$. График функције f нема превојних тачака.



На основу података из (1) - (3) можемо скицирати график функције f. На слици су нацртане и асимптоте графика функције f.

Драган Ђорић