МАТЕМАТИКА 1

Јануар 2011 - Група II

1. Решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ 2x & - & 3y & + & (a+2)z & - & t & = & b+4 \\ 3x & - & 7y & + & (2a+2)z & + & (b-3)t & = & 2b+2 \end{array}$$

у зависности од реалних параметара a и b.

Решење: Применом Гаусовог алгоритма добијамо еквивалентан систем

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ & & y & + & (a+4)z & + & 3t & = & b+10 \\ & & & & (3a+9)z & + & (b+6)t & = & 3b+21 \end{array}$$

Нека је A матрица, а $\overline{A}$ проширена матрица овог система.

1°. За $a \neq -3$ је $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, што значи да систем има једнопараметарски скуп решења (видети НУ[1], стр.80). Ако је t слободан параметар (базисни минор матрице A може да се формира помоћу прве три колоне), тада из последње једначине добијамо

$$z = \frac{b+7}{a+3} - \frac{b+6}{3a+9}\,t = \frac{3b+21-6t-bt}{3(a+3)}, \tag{1}$$

из друге једначине добијамо (након 'заморног' сређивања)

$$y = \frac{3a-b+2}{a+3} + \frac{ab+4b-3a-3}{3a+9}\,t = \frac{9a-3b+6-3at+abt-3t+4bt}{3(a+3)} \tag{2}$$

и коначно из прве једначине добијамо (опет након 'заморног' сређивања)

$$x = \frac{3a-b+2}{a+3} + \frac{2ab+7b+6}{3a+9}\,t = \frac{9a-3b+6+2abt+6t+7bt}{3(a+3)}. \tag{3}$$

Скуп решења $\mathcal{R}_t$ је скуп уређених четворки (x, y, z, t), где је $t \in \mathbb{R}$, а x, y и z су дати једнакостима (3), (2) и (1).

2°. За $a = -3$ и $b \neq -6$ је такође $r(A) = r(\overline{A}) = 3$, па и у овом случају систем има једнопараметарски скуп решења. Међутим, базисни минор матрице A не може да се формира помоћу прве три колоне те матрице, што значи да непозната t улази у базисне променљиве (видети НУ, стр.80). Из последње једначине имамо да је

$$t = \frac{3b+21}{b+6} = \frac{3(b+7)}{b+6}. \tag{4}$$

Ако је z слободна променљива, тада из друге једначине добијамо

$$y = b+1-\frac{9}{b+6} - z = \frac{b^2+7b-3-bz-6z}{b+6}, \tag{5}$$

а затим из прве једначине добијамо

$$x = 2b+5-\frac{12}{b+6} - z = \frac{2b^2+17b+18-bz-6z}{b+6}. \tag{6}$$

Скуп решења $\mathcal{R}_z$ је скуп уређених четворки (x, y, z, t), где је $z \in \mathbb{R}$, а x, y и t су дати једнакостима (6), (5) и (4).

---

[1] Нови Уџбеник *'Математика 1'*

3°. За $a=-3$ и $b=-6$ је $r(A)=2$ и $r(\overline{A})=3$. Према Кронекер-Капелијевој теореми (видети НУ, стр.78) систем нема решења. Овај закључак се лако добија и без Кронекер-Капелијеве теореме јер за наведене вредности параметара a и b трећа једначина постаје нетачна једнакост $0=3$.

2. Дате су права a и раван β у простору:

$$a\colon \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3}{1} \qquad \text{и} \qquad \beta\colon x-y+2z-9=0.$$

а) Одредити вектор правца $\vec{v}_a$ праве a и вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β.

б) Одредити произвољне тачке $A\in a$ и $B\in\beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β.

г) Одредити праву c која је симетрична правој a у односу на раван β.

Решење:

а) Векторе $\vec{v}_a$ и $\vec{n}_\beta$ можемо одредити из датих једначина праве a и равни β. На пример, $\vec{v}_a=(3,5,1)$ и $\vec{n}_\beta=(1,-1,2)$. Уместо ових вектора можемо узети и било које њима колинеарне векторе (видети НУ, стр.123-124 и стр.117-118).

б) Није јасно шта се тражи! Координате произвољне тачке $A\in a$ су (x_1,y_1,z_1) за које важи $\dfrac{x_1+2}{3}=\dfrac{y_1-1}{5}=\dfrac{z_1-3}{1}$, а координате произвољне тачке $B\in\beta$ су (x_2,y_2,z_2) за које важи $x_2-y_2+2z_2-9=0$. Ако се мисли на конкретне тачке, онда су то, на пример, $A(-2,1,3)$ и $B(9,0,0)$.

в) Како је

$$\vec{v}_a\cdot\vec{n}_\beta=(3,5,1)\cdot(1,-1,2)=3\cdot1+5\cdot(-1)+1\cdot2=3-5+2=0,$$

права a и раван β су паралелне (видети НУ, стр.128), при чему немају заједничких тачака јер $A\notin\beta$.

г) Права c има исти правац као дата права a и садржи тачку $C(x_0,y_0,z_0)$ која је симетрична тачки A у односу на раван β. Нека је P заједничка тачка праве $p\colon \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}=t$ (права која је нормална на раван β и садржи тачку A) и равни β. Ако координате $(t-2,-t+1,2t+3)$ произвољне тачке праве p заменимо у једначини равни β, добијамо $t=1$. То значи да тачка P има координате $(-1,0,5)$. Из једнакости између координата тачака A, P и C (P је средиште дужи AC)

$$\frac{-2+x_0}{2}=-1,\quad \frac{1+y_0}{2}=0,\quad \frac{3+z_0}{2}=5$$

добијамо $x_0=0$, $y_0=-1$, $z_0=7$. Према томе, права c садржи тачку $C(0,-1,7)$ и има вектор правца $\vec{v}_a$. Једначина праве c је

$$\frac{x}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-7}{1}.$$

3. Дата је функција

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln(1+3x)-\sin 2x-4x+9x^2}{x^3}, & x\neq 0\\ K, & x=0\end{cases}.$$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $\ln(1+3x)$ и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim\limits_{x\to0} g(x)$.

в) У зависности од вредности параметра K испитати непрекидност функције g.

Решење: **а)** Нека су L_3 и S_3 Маклоренови полиноми функција $x \mapsto \ln(1+3x)$ и $x \mapsto \sin 2x$. Из познатих формула за Маклоренове полиноме функција ln и sin (видети НУ, стр.235 и стр.233) имамо да је

$$L_3(x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} = 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{3}x^3 = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3,$$

$$S_3(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} = 2x - \frac{8}{6}x^3 = 2x - \frac{4}{3}x^3.$$

б) Нека је $g(x) = \dfrac{h(x)}{x^3}$ за $x \neq 0$. Како је $\ln(1+3x) = L_3(x) + o(x^3)$ и $\sin 2x = S_3(x) + o(x^3)$ када $x \to 0$, то је

$$\begin{aligned} h(x) &= 2L_3(x) - S_3(x) - 4x + 9x^2 + o(x^3) \\ &= 2\left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3\right) - 2x + \frac{4}{3}x^3 - 4x + 9x^2 + o(x^3) \\ &= \frac{58}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

када $x \to 0$. Према томе,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{58}{3}\,x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{58}{3}.$$

в) За $K = \dfrac{58}{3}$ функција g је непрекидна на $D_g = (-1/3, +\infty)$. За $K \neq \dfrac{58}{3}$ функција g је непрекидна на интервалима $(-1/3, 0)$ и $(0, +\infty)$ (као количник двеју непрекидних функција, видети НУ, Теорема 10.3, стр.183), док у тачки $x = 0$ има прекид прве врсте јер је $g(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

4. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$.

Решење: (1) Пошто је $x^2+3x+3 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$ (дискриминанта овог тринома је мања од нуле), то је $D_f = \mathbb{R}$, што значи да функција f нема вертикалних асимптота. Функција има нулу у тачки $x = 0$, позитивна је за $x > 0$ и негативна за $x < 0$. Функција нема ни хоризонтале асумптоте јер је $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Из једнакости

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 + 3x^2 + 3x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+3x+3} - x\right) = -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2+3x+3} = -3$$

следи да је права $y = x - 3$ коса асимптота и за $x \to -\infty$ и за $x \to +\infty$.

(2) Како је

$$f'(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2}{(x^2+3x+3)^2} = \frac{x^2(x+3)^2}{(x_2+3x+3)^2} \geq 0,$$

према Теореми 14.1 (НУ, стр.245) функција f је растућа на D_f, што значи да нема локалних екстремума.

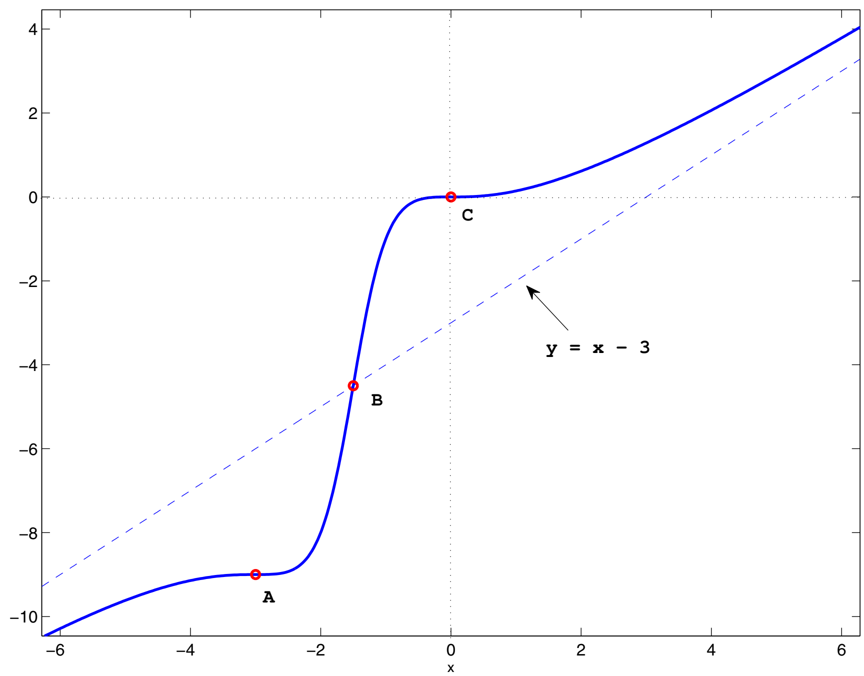
(3) Ако је $P(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$ и $Q(x) = x^2 + 3x + 3$, тада је

$$f''(x) = \left(\frac{P}{Q^2}\right)' = \frac{P'Q^2 - P\cdot 2QQ'}{Q^4} = \frac{P'Q - 2PQ'}{Q^3},$$

при чему је $P'(x) = 4x^3+18x^2+18x$ и $Q'(x) = 2x+3$. Након 'напорног' множења и сређивања добијамо

$$f''(x) = \frac{12x^3 + 54x^2 + 54x}{(x^2 + 3x + 3)^3} = \frac{6x(2x^2 + 9x + 9)}{(x^2 + 3x + 3)^3}.$$

Трином $2x^2 + 9x + 9$ је позитиван на интервалима $(-\infty, -3)$ и $(-3/2, +\infty)$ и негативан на интервалу $(-3, -3/2)$, а функција f'' је позитивна на интервалима $(-3, -3/2)$ и $(0, +\infty)$ и негативна на интервалима $(-\infty, -3)$ и $(-3/2, 0)$. Према томе, функција f је конвексна на интервалима $(-3, -3/2)$ и $(0, +\infty)$ и конкавна на интервалима $(-\infty, -3)$ и $(-3/2, 0)$. График функције f има превојне тачке $A(-3, -9)$, $B(-3/2, -9/2)$ и $C(0, 0)$.



На основу података из (1) - (3) можемо скицирати график функције f. На слици су означене превојне тачке графика и нацртана је коса асимптота.

Драган Ђорић